

Dugoročne posljedice učenja matematike u Finskoj*

Olli Martio**, Helsinki, Finska



1981. i 2003. godine u Finskoj su provedene dvije slične provjere matematičkog znanja učenika. Ispiti su međusobno uspoređeni, mjereći učenikovo poznavanje osnovnih matematičkih pojmova na kraju srednje škole. Rezultati tih ispitivanja bitno su utjecali na promjenu matematičkog kurikula i načina poučavanja u Finskoj.

1. Uvod

Kurikul se u finskom školskom sustavu mijenjao svakih 8 do 10 godina. Službeni dokument kurikula ne ulazi previše u detalje. Škole mogu slobodno birati po kojim će udžbenicima raditi, u Finskoj nema kontrole udžbenika, niti službenog odobravanja za uporabu. Vladaju zakoni slobodnog tržišta. Da

bi se dobio detaljniji uvid u matematički kurikulum, treba proučiti udžbenike i nastavničku praksu. Mnoge zemlje koriste sličan sustav. Detaljniji opis nastave matematike i prirodnih znanosti u Finskoj pročitajte u [1]. Uz to, ova zbirka radova sadrži i ocjenu školovanja nastavnika matematike u Finskoj.

Skoro svi učenici po završetku srednje škole (gimnazije), u dobi od 18 godina, pristupaju maturi. Sto-

* Naslov izvornika: *Long Term Effects in Learning Mathematics in Finland — Curriculum Changes and Calculators*, članak objavljen u časopisu *The Teaching of Mathematics*, 2009, Vol. XII, 2, pp. 51–56.

** Olli Martio, profesor emeritus Sveučilišta u Helsinkiju, Finska.

ga su ispiti na maturi dobra prilika za proučavanje krajnje efikasnosti finskog školskog sustava. Ispit iz matematike nije obavezan, premda mu pristupa većina učenika. Matura u Finskoj stara je 150 godina, a dio koji se odnosi na matematiku u osnovi je isti zadnjih 100 godina, osim samih zadataka. Učenici mogu izabrati nižu (osnovnu) ili višu razinu matematike na ispitu, neovisno o tome koju vrstu srednje škole su završili. Ispit niže razine je jednostavniji. Oba ispita sastoje se od 15 zadataka otisnutih na papiru A4 formata. Učenik može odabrati i rješavati najviše 10 od ponuđenih 15 zadataka. U praksi, riješi li dva zadatka ili čak nešto manje, učenik već može proći na ispitu. Za odličnu ocjenu treba imati osam ili devet ispravno riješenih zadataka, to se svake godine mijenja. Učenici se ocjenjuju pomoću sedam ocjena koje se uvijek jednako raspodjeljuju. Zbog toga one nisu dobar pokazatelj promjene matematičkog znanja učenika. Sami zadaci značajnije su se mijenjali u zadnjih desetak godina, a sastavljeni su na temelju već spomenutog, prilično "labavo" zadanog službenog kurikula.

Pregled Finskih maturalnih ispita iz matematike prikazan je u [2].

Namjera ovog članka jest proučiti promjene kurikula i nastavničke prakse koje su ostavile ozbiljne dugoročne posljedice na nastavu matematike u Finskoj.

2. Matematički kurikulum — promjene i posljedice

Promjene matematičkog kurikula u Finskoj slijedile su međunarodna kretanja. Od 1970. godine dogodile su se tri značajnije promjene. Prva se zbilja pod utjecajem takozvane "nove matematike". Izazvala je puno rasprava ali je imala relativno slab učinak. Druga promjena mogla bi se nazvati "povratkom temeljima". Treća promjena, "rješavanje problema", imala je ozbiljnije posljedice. Na nju je najviše utjecao stav da je važna jedino primjena matematike — sama je matematika bila zanemarena. Jaki utjecaj imala je i uporaba kalkulatora. Smatralo se nepotrebnim učiti ono što se moglo izračunati na

kalkulatoru. Slične promjene iskusile su i druge zemlje članice OECD-a.

U Finskoj su te promjene utjecale na matematički kurikulum na sljedeći način:

- matematika je u školama postala opisna — skoro sasvim su izbačene točne definicije i dokazi;
- zanemarila se geometrija;
- računanje se izvodilo pomoću kalkulatora i radilo se samo s brojevima, a ne s općim izrazima.

Učenici su imali problema pri prelasku s osnovnoškolske na srednjoškolsku matematiku, a posebno pri prelasku sa srednjoškolske na višu matematiku. Učinjeno je vrlo malo da bi se riješio taj nesklad.

Loše posljedice zorno pokazuje sljedeći zadatak, nedavno zadan u jednom maturalnom ispitu iz matematike na nižoj razini: "Zašto je zbroj kutova u trokutu jednak 180 stupnjeva?" Nitko nije znao zašto, iako je problem objašnjen u nekoliko udžbenika (pravac siječe dva paralelna pravca pod istim kutovima). To dokazuje kako je poučavanje matematičkih principa izbačeno, barem na osnovnoj razini, i zamijenjeno hrpom činjenica predočenih bez razmišljanja. Mnogi nastavnici zadovoljni su ako ovo svojstvo trokuta pokažu samo škarama i papirom.

Posljedice promjene kurikula u Finskoj proučavao je L. Näveri [3]. 1981. i 2003. godine provedena su dva slična ispitivanja matematičkog znanja učenika. Učenici koji su pisali te ispite imali su 15–16 godina (9. razred) i odgovarali su dobnoj grupi učenika podvrgnutih PISA-inom testiranju, s obzirom da djeca u Finskoj kreću u školu sa sedam godina. U ispitivanju je sudjelovalo više od 350 učenika. Svi su rješavali iste zadatke i to bez uporabe kalkulatora. Slijede neki primjeri postavljenih pitanja.

Prva grupa zadataka odnosi se na množenje, a broj točnih odgovora izražen je u postocima.

Množenje	1981.	2003.
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$	95.2%	90.1%
$(-3)^2 = 9$	95.2%	90.1%
$18 \cdot 4 \cdot 32 \cdot 15 = 15 \cdot 32 \cdot 4 \cdot 18$	93.2%	85.9%
$0.015 \cdot 249 = 0.15 \cdot 24.8$	66.8%	62.3%
$0 \cdot 8436 = 0 \cdot 0.536$	79.0%	65.6%

Učinkovitost je od 1981. do 2003. najviše pala na pitanjima u vezi racionalnih brojeva, za 20%.

Racionalni brojevi	1981.	2003.
$26 + 17 =$	98.5%	89.8%
$(1/2) \cdot (2/3) =$	56.4%	36.9%
$(4/3) \cdot 5 =$	66.3%	44.4%
$(1/6) \cdot (1/2) =$	56.5%	28.3%
$(1/5) : 3 =$	49.2%	27.5%
$1278/2 =$	55.1%	36.8%

Dobru sliku nakon promjene kurikula nisu dali niti rezultati iz područja algebre.

Algebra	1981.	2003.
$10^3 \cdot 10^2 =$	72.5%	43.3%
$x^4 \cdot x^5 =$	71.7%	47.3%
$(59^2)^3 = (59^3)^2$	61.1%	31.7%

Da je na testu bila dopuštena uporaba kalkulatora, rezultati bi sigurno pokazivali drukčije brojeve.

U anketi 2003. bilo je također postavljeno pitanje: svojim riječima objasni značenje izraza $(4/5) \cdot 5$. Evo rezultata:

točan odgovor	6.5%
skoro točan odgovor	5.4%
točan račun ali netočno obrazloženje	8.8%
točan račun ali bez obrazloženja	31.5%
netočan račun i obrazloženje	31.0%
bez odgovora	16.8%

Malo je pouzdanih međunarodnih anketa kojima se uspoređuju promjene matematičkog znanja učenika osnovnoškolske i srednjoškolske dobi kroz razdoblje od 20–30 godina. Teško je razlučiti posljedice koje su rezultat promjene kurikula od onih koje su rezultat promjena u izvođenju nastave. Izvještaj [3] svakako pokazuje da te posljedice postoje. Bilo bi zanimljivo pregledati stanje i u ostalim zemljama te potražiti općeniti obrazac koji je doveo do tih rezultata. No, bar jedan od razloga je jasan — to je uporaba kalkulatora.

Na PISA-inom testu 2003. godine, Finska je bila najbolja od zemalja članica OECD-a. Testiranje se provelo nad 14-godišnjacima. Rijetka su bila pitanja poput onih postavljenih u [3]. I u TIMSS-izvještaju 1999. uspjeh finskih učenika bio je također iznad prosjeka. U kasnijim ispitivanjima zadaci su bili sličniji onima postavljenim u [3]. Razlozi uspjeha Finske na PISA-inom testu dani su u [1]. Rasprava s puno više kritike školske matematike može se naći u Finskom elektronskom časopisu *SOLMU* [4] gdje su čak dva specijalna broja posvećena PISA-inom testiranju.

3. Nakon završnih ispita

Učenici koji polože maturu ne upisuju se samo na fakultete. Mnogi od njih odlaze u razne više strukovne škole (primjerice za više medicinske sestre, razne više tehničke škole i sl.). Obično su to, iako ne svi, učenici koji su maturu položili sa slabijim ocjenama.

Profesori viših strukovnih škola, i to ne samo matematičari, u zadnjih se deset godina žale na kvalitetu matematičkog znanja novoupisanih učenika. Sljedeći primjer, preuzet iz [5], pokazuje da njihove pritužbe nisu bez razloga. Ispit su pisali bruoši jedne tehničke više škole i brojevi u postocima prikazuju broj točnih odgovora na pitanja iz lijevog stupca. "Niža razina" i "viša razina" odnosi se na učenike koji su položili odgovarajuću razinu matematike na maturi. Uporaba kalkulatora nije bila dozvoljena.

	niža razina	viša razina
$\sqrt{3^2 + 4^2} =$	55%	78%
$(1/3 - 1/7)/4$	25%	54%
$a^2 - (a + 1)^2 + 2a =$	17%	50%
Odredi R iz formule $U = E - IR$	26%	68%
$\ln(x^2) - 2 \ln x =$	7%	34%

Ispit pokazuje da su sređivanje brojevnih izraza, racionalni brojevi, logaritmi i algebarske operacije teški onim učenicima koji su položili nižu razinu matematike na maturi. Ali i među učenicima koji su položili višu razinu i koji su u školi odslušali puno više nastavnih sati matematike ima puno onih koji nisu naučili osnovne algebarske operacije.

4. Zaključak

Najozbiljniji nedostaci finskog matematičkog kurikula su redosljed i vrijeme obrade dodijeljeno različitim pojmovima i vještinama. Nemoguće je u ovom radu dati detaljnu analizu, no mogu spomenuti neke tipične primjere. U naprednoj matematici vjerojatnost se uči prije integrala, a nizovi i redovi ostavljeni su za sam kraj. Navedeni rezultati ukazuju da matematički kurikulum za srednje škole ima ozbiljnih nedostataka. U Finskoj kupac više ne smije zatražiti 3/4 kg mesa u mesnici, jer mesarov pomoćnik ne zna što to znači. Ispravan iznos bio bi 750 g jer se to može upisati u kalkulator. Iako su promjene matematičkog kurikula načinjene kako bi pomogle ljudima da koriste matematiku u svakodnevnom životu, taj cilj je potpuno promašen. Rješavanje problema je precijenjeno na svim razinama matematičkog kurikula. Profesori u višim strukovnim i tehničkim školama te na fakultetima shvatili su to na teži način.

Prema izvještajima [3] i [5] u poučavanju matematike pojavio se vrlo ozbiljan problem. To je pogrešna uporaba kalkulatora. Iako se u osnovnoj školi računalo *pješice*, uz papir i olovku, većina učenika kasnije potpuno zaboravi tu vještinu jer se navikne na kalkulare. To se ne odnosi jedino na 15–20% najboljih učenika, kao što se vidi iz rezultata na maturi. Uporaba kalkulatora u školi je prenaplašena, pogotovo stoga jer se danas njihova uporaba u

svakodnevnom životu prilično smanjila. Stručnjaci, koji koriste matematiku, gotovo ih nikad ne koriste. Stoga vrijeme provedeno u radu s klakulatorima ne odgovara ideji da vještine stečene u školi trebaju imati neku praktičnu vrijednost kasnije u životu.

Kalkulare su u škole uveli između 1975. i 1995. godine. Nakon sporog početka, koristili su se sve više i više. Bez sumnje je to najveća promjena u načinu poučavanja matematike, a njezine posljedice pročitajte u izvještajima [3] i [5].

Matematika se ne tiče samo profesionalnih matematičara. Ona se sve više koristi u raznim strukama, a problemi koje treba rješavati razlikuju se od onih iz PISA-ina testiranja. U Finskoj, kao i u drugim zemljama, matematički kurikulum uključuje pojmove i vještine koje su jednom tu stavljene jer je netko mislio da bi mogle biti korisne. U većini slučajeva vrijeme je pokazalo da te posebne vještine ne prate više zahtjeve modernog društva. Građa finskog kurikula i nastavna praksa zahtijevaju značajnije promjene kako bi se udovoljilo tim izazovima. I to ne samo u Finskoj.

LITERATURA

- 1/ *How Finns Learn Mathematics and Science*, Editors: E. Pehkonen, M. Ahtee, J. Lavonen, Sense Publishers 2007, 278 pp.
- 2/ A. Lahtinen, *The Finnish Matriculation Examination in Mathematics*, in *Nordic Presentations* (eds. E. Pehkonen, G. Brandell & C. Winslow), 2005, 64–68. University of Helsinki, Department of Applied Sciences of Education. Research Report 262.
- 3/ L. Näveri, *Understanding computations*, Dimensio 3/2005, 49–52 (in Finnish).
- 4/ SOLMU, 2 special volumes on the PISA survey 1/2005–2006, 2/2005–2006: <http://solmu.math.helsinki.fi/2005/erik1/> (in Finnish) and <http://solmu.math.helsinki.fi/2006/erik2/> (in Finnish).
- 5/ R. Tuohi et al., *Fact or Fiction—mathematical skills of new engineering students*, Turun ammattikorkeakoulun raportti 29, Turku 2004 (in Finnish).