

Radionica “Kombinatorne igre”



*Mia Černivec,
Sanja Rukavina, Rijeka*

Društvene igre ljudi igraju već stoljećima. Prema jednoj definiciji igra je intelektualna ili tjelesna aktivnost čiji je jedini cilj da se osoba koja joj se predaje zabavi. Ali igra je, također, i djelatnost podvrgnuta nekim pravilima ili nekom sustavu pravila. Ključne komponente igre su motivacija za dostizanje cilja, pravila te interakcija, odnosno kontakt između sudionika. Od igrača se zahtijeva intelektualni napor, a veliki broj različitih mogućnosti za pojedini potez razvija kod igrača sposobnost logičkog razmišljanja i zaključivanja. Neizvjesnost i preokreti tijekom igre donose igračima velika uzbuđenja. U ljudskoj je prirodi da igrači koji sudjeluju u igri nastoje ostvariti maksimalnu korist, odnosno pobijediti. Kombinatorne igre zanimljive su i zbog proučavanja pripadnih pobjedničkih strategija.

Igranje kombinatornih igara blisko je bavljenju matematikom jer stimulira iste potencijale i zahtijeva isti tip strategije kao i matematika. Igre su dobre jer djeluju motivirajuće na učenike i razvijaju stav o matematici kao bauku. Nadalje, uz pomoć takvih igara i sličnih kombinatornih problema prilagođenih određenoj dobi, s učenicima se mogu analizirati i neki vrlo zahtjevni problemi te kod njih pobuditi da-

ljnji interes za matematiku. Zbog svega navedenog pristupili smo osmišljavanju radionice za rad s učenicima koja se temelji na kombinatornim igrama. Prije opisa radionice navest ćemo tek osnovne činjenice o kombinatornim igrama, a više o teoriji igara i kombinatornim igrama može se pročitati u izvorima [1] i [2].

Osnovno o kombinatornim igrama

Kao što sam naziv govori, kombinatorne igre imaju dodirnih točaka s granom matematike koja se zove kombinatorika. Kombinatorni problemi često se rješavaju uz pomoć vrlo jednostavnih računskih operacija, što nam pruža mogućnost prilagodbe nekih kombinatornih problema raznoj dobi i različitim predznanjima matematike. Razvila se i posebna grana matematike, teorija igara, koja se između ostaloga bavi i proučavanjem kombinatornih igara. Njezinim početkom može se smatrati knjiga *Theory of games and economic behavior* matematičara Johana von Neumanna i ekonomista

Oscara Morgensterna. Razvoj ove teorije započeo je sredinom 20. stoljeća. Teorija igara proučava situacije konflikta između dvaju ili više sudionika. Cilj je ove teorije odrediti ponašanje sudionika koje je za njih najpovoljnije. U najširem smislu teoriju igara možemo podijeliti u dvije grane – kooperativnu i nekooperativnu teoriju igara. Kombinatorne igre dio su nekooperativne teorije igara. U kombinatornim igrama nema elemenata slučajnosti i u svakom trenutku oba igrača imaju potpunu informaciju o trenutnom stanju igre. U skladu s navedenim, sve igre zastupljene u ovoj radionici zadovoljavaju sljedeće uvjete:

- postoje dva igrača;
- pravila igre jasno su određena za oba igrača, potezi kojima iz nekog položaja prelazimo u novi položaj dozvoljeni su za oba igrača;
- igrači naizmjenice vuku poteze;
- igra završava kada je ostvaren položaj u kojem za igrača koji je na potezu nema više dozvoljenih mogućih poteza, takve položaje nazivamo završnim;
- igra se završava nakon određenog broja poteza, bez obzira na to koliko je bila igrana.

Tijek radionice

Na samom početku radionice upoznajemo učenike s osnovnim pojmovima teorije igara. Također, jasno definiramo uvjete koje igra mora zadovoljavati da bismo mogli tvrditi kako je to kombinatorna igra. Nakon uvodnog dijela učenike podijelimo u grupe. Svaka grupa trebala bi se sastojati od parnog broja učenika jer u kombinatornim igrama sudjeluju dva igrača. Svaka grupa imat će zadatak otkriti pobjedničku strategiju za zadanu igru. Igre koje su igrane na radionici koju opisujemo su *Nim*, *Chomp*, *Sprouts* (Klice) i *Sim*. Podijelimo grupama pravila igre i materijale koji su im potrebni za igru te ih ostavljamo dvadesetak minuta u igri. Grupe uz svaku igru dobivaju i odgovarajući zadatak. U ovom dijelu radionice učenici samostalno rade. Jako je bitno provjeriti je li svaka grupa shvatila koja su točna pravila igre. Učenici često pravila intepretiraju na vlastiti način, čime igre gube smisao. Nakon što

je svaka grupa bila posvećena “svojoj” igri dvadesetak minuta, zajedno prolazimo kroz svaku igru i prezentiramo je svim učenicima kako bi sve grupe upoznale sve igre. Voditelj radionice iznosi povijesne činjenice nastanka svake igre. Predstavnicima grupa čitaju naglas pravila igre te iznose rješenja postavljenih zadataka. Za to vrijeme projiciraju se pravila igre kako bi ih učenici u svakom trenutku mogli ponovno pročitati. Zajednički se analiziraju iznesena rješenja zadataka i provjerava njihova točnost. Predstavimo u nastavku igre koje su igrane na radionici.

Nim je matematička igra za dva igrača u kojoj igrači naizmjenice uklanjaju predmete iz redova. Na stolu se nalazi 16 šibica poslaganih u četiri reda. U radionici smo koristili šibice, ali mogu se koristiti i neki drugi predmeti po vlastitom izboru (npr. flomasteri, bojice, štapići i sl.). U prvom redu je jedna šibica, u drugom redu su tri šibice, u trećem redu je pet šibica, dok je u četvrtom redu sedam šibica. Svaki put kada je igrač na redu mora ukloniti barem jedan predmet te može ukloniti sve predmete koji se nalaze u istom redu krećući s desne strane. Igrači naizmjenice biraju redak i uzimaju iz njega jednu ili više preostalih šibica. Pobjeđuje igrač koji uzima posljednju šibicu na stolu. Zadatak ove grupe je utvrditi pobjedničku strategiju. Moguće je da strategija do koje će grupa doći neće biti upravo pobjednička strategija pa voditelj radionice treba objasniti pobjedničku strategiju na raznim projiciranim primjerima. Učenici često ne odustaju od vlastite pogrešne strategije te nakon objašnjavanja i dalje stoje iza vlastite strategije u uvjerenju da je pobjednička. U tom ih je slučaju potrebno razuvjeriti na način da se odigra igru protiv njih uz korištenje pobjedničke strategije.

Druga igra je igra **Chomp** koja se izvorno igra na pravokutnoj ploči čokolade dimenzija $n \times m$ podijeljenoj na kvadratiće. Praktičnije je koristiti male čokoladice ili kiki bombone koji se poslažu u obliku pravokutne ploče dimenzija $n \times m$. Igrači naizmjenice biraju čokoladicu te “pojeđu” izabranu čokoladicu i sve čokoladice koje se nalaze desno ili iznad izabrane čokoladice. Čokoladica u donjem lijevom kutu je otrovana i igrač koji je pojede je izgubio igru. I ova grupa dobila je zadatak utvrditi pobjedničku strategiju. Kako do danas nisu

otkrivene pobjedničke strategije u igri *Chomp* za općeniti slučaj, već su one poznate za neke specifične slučajeve, upravo takve zadajemo učenicima. Čokoladice je potrebno poslagati u obliku kvadratne ploče (slučaj $m = n$) ili ploče dimenzija $2 \times n$. Navedeni specifični slučajevi imaju poznatu pobjedničku strategiju. Upozorite učenike da riječi “povedite čokoladice” ne shvaćaju doslovno, jer ćete u protivnom vrlo brzo ostati bez materijala potrebnih za igranje igre.

Više o varijantama igre *Nim* i *Chomp* i njihovim pobjedničkim strategijama navedeno je u izvoru [3].

Sljedeća igra uključena u radionicu je igra **Sprouts (Klice)**. Za početak igre potrebno je na listu papira nacrtati n točaka. Igra se naizmjenično. Svaki potez sastoji se od crtanja linije između dviju točaka i određivanja nove točke negdje na toj liniji. Prilikom crtanja igrači moraju poštivati sljedeća pravila:

- linija može biti ravna ili zakrivljena, ali ne smije sijeći niti jednu drugu liniju;
- nova točka ne može biti smještena na krajevima linije, mora dijeliti liniju na dva kraća dijela;
- ni iz jedne točke ne smije “izlaziti” više od triju linija.

U ovoj igri možete učenicima ponuditi razni broj točaka i različito ih rasporediti na listu papira te tako učiniti igru zanimljivijom. Utvrđivanje pobjedničke strategije u ovoj je igri presloženo pa grupa dobiva zadatak da utvrdi koji je maksimalan broj poteza koji se u jednoj igri može odigrati ako pretpostavimo da na početku igre imamo n zadanih točaka. Svaka od tih točaka ima tri života (iz svake točke “izlaze” tri linije). Dakle, na početku igre imamo $3n$ života. Svaki put kada spojimo dvije točke uništimo dva života. Pri spajanju dviju točaka također dodajemo jednu novu točku (iz koje već “izlaze” dvije linije) te ujedno dodajemo jedan život. Dakle, u svakom se potezi gubi jedan život i igra mora završiti u najviše $3n$ poteza, što je ujedno i maksimalan broj poteza koji se u jednoj igri može odigrati.

Posljednja igra u okviru ove radionice bila je igra **Sim**. Za početak igre potrebno je na listu papira nacrtati šest točaka. Dva igrača naizmjenično spajaju po dvije točke, svaki svojom bojom. Igru gubi

onaj igrač koji napravi trokut svoje boje. Napomenite učenicima da se u obzir uzimaju isključivo oni trokuti kojima su vrhovi tri zadane polazne točke, a ne trokuti koji se dobiju kada se kao vrhovi uzmu presjeci linija koje učenici povlače. I u ovoj igri grupa mora otkriti koji je maksimalan broj poteza koji se u jednoj igri može odigrati. Rješenje zadatka nije teško, može se lijepo povezati s brojem dijagonala konveksnog mnogokuta i na taj način prebrojati poteze. Kao zanimljivost za učenike, igra *Sim* može se povezati i s teoremom koji glasi: U svakoj skupini od šest ljudi postoje ili tri međusobna poznanika ili postoji trojka ljudi od kojih se nikoja dvojica ne poznaju. Ovaj je iskaz učenicima posebno zanimljiv.

Kada su predstavljena rješenja svih zadataka, grupe međusobno mijenjaju igre. Svaka grupa dobiva priliku odigrati svaku igru. Sada oni već poznaju pobjedničke strategije te ih mogu isprobati na svojim protivnicima.

Ova radionica iziskuje mnogo razmišljanja i isprobavanja raznih strategija u igrama te se pokazalo da ju je najbolje izvoditi u vremenskom trajanju od dva školska sata. Radionicu smo proveli u okviru Festivala znanosti 2011. godine uz sudjelovanje učenika osmih razreda raznih riječkih osnovnih škola. Neke zadatke uspjeli su sami riješiti, a za neke im je bila potrebna mala pomoć. Radionica je učenicima bila zanimljiva, pokazali su svoju maštovitost, kreativnost i sposobnost logičkog zaključivanja kroz igru. Grupe koje su uspjele riješiti postavljene zadatke bile su jako ponosne i s veseljem su objašnjavale rezultate do kojih su došli ostalim grupama.

LITERATURA

- 1/ Matko Botinčan, *Kombinatorne igre*
<http://e.math.hr/igre/igreprint.pdf>
- 2/ Vedran Krčadinac, *Teorija igara – matematičko modeliranje konfliktnih situacija* <http://e.math.hr/old/teorijaigara/index.html>
- 3/ Josip Vuger, Vedran Krčadinac, *Dvije igre i njihova generalizacija* <http://e.math.hr/old/dvijeigre/index.html>