

# Više rješenja jednog trigonometrijskog zadatka

Alija Muminagić, Nykøbing F., Danska

U MiŠ-u br. 54 dano je šest rješenja za zadatak:  
Dokažite da vrijedi jednakost

$$\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 80^\circ. \quad (1)$$

U ovom ćemo članku dati (samo) dva rješenja (jedno algebarsko i jedno geometrijsko) za sljedeći zadatak:

**Zadatak.** Dokažite da vrijedi jednakost

$$\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ. \quad (2)$$

**Rješenje 1.** (algebarsko) U ovom rješenju primijenit ćemo adicijsku formulu  $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$  iz koje proizlazi da je

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(x+y)(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y) \quad (3)$$

i jednakost (1).

Sada imamo:

$$\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$$

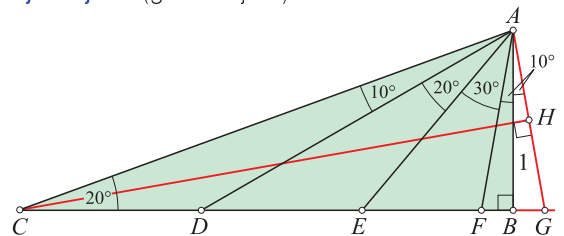
$$\begin{aligned} &\stackrel{(3)}{=} \operatorname{tg} 50^\circ (1 - \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ) + \operatorname{tg} 60^\circ \\ &= \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \\ &= (\text{zbog } \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ = 1) \\ &= \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(3)}{=} \operatorname{tg} 110^\circ (1 - \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ) - \operatorname{tg} 10^\circ \\ &= (\text{zbog } \operatorname{tg} 110^\circ = -\operatorname{tg} 70^\circ) \\ &= -\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ \\ &= \operatorname{tg} 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 70^\circ - (\operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(3)}{=} \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 80^\circ (1 - \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 10^\circ) \\ &= (\text{zbog } 50^\circ + 60^\circ + 70^\circ = 180^\circ \text{ vrijedi da je} \\ &\quad \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 80^\circ \\ &\quad + \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 80^\circ \\ &= (\text{zbog } \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = 1) \\ &= \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 80^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ \\ &\stackrel{(1)}{=} \operatorname{tg} 80^\circ - \operatorname{tg} 80^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Rješenje 2.** (geometrijsko)



Neka je trokut  $ABC$  pravokutan i neka je  $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle BAC = 70^\circ$  i  $|AB| = 1$ . Na kateti  $\overline{BC}$  odredimo točke  $D$ ,  $E$  i  $F$  tako da je  $\sphericalangle CAD = 10^\circ$ ,  $\sphericalangle DAE = 20^\circ$  i  $\sphericalangle EAF = 30^\circ$  (vidi sliku). Lako slijedi da je  $\sphericalangle FAB = 10^\circ$  i  $\sphericalangle ACB = 20^\circ$ . U pravokutnim trokutima  $ACB$ ,  $ADB$ ,  $AEB$  i  $AFB$  je redom (zbog  $|AB| = 1$ )  $\operatorname{tg} 70^\circ = |CB|$ ,  $\operatorname{tg} 60^\circ = |DB|$ ,  $\operatorname{tg} 40^\circ = |EB|$  i  $\operatorname{tg} 10^\circ = |FB|$ .

Da bismo dokazali jednakost (2), tj.  $\operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$ , vidimo da moramo dokazati da je

$$|CB| = |FB| + |EB| + |DB|.$$

Imamo:

$$\begin{aligned} |CB| &= |FB| + |EB| + |DB| \\ \Leftrightarrow |CD| + |DB| &= |FB| + |EB| + |DB| \\ \Leftrightarrow |CD| + |FB| &= |EB|. \end{aligned} \quad (4)$$

Odredimo sada na produžetku katete  $\overline{CB}$  preko točke  $B$  točku  $G$  tako da je  $\sphericalangle BAG = 10^\circ$ . Iz podudarnosti trokuta  $FAB$  i  $GAB$  vrijedi da je  $|FB| = |BG|$  pa je jednakost (4) ekvivalentna s

$$|CD| = |BG| + |EB| \iff |CD| = |EG|. \quad (5)$$

Sinusov poučak primijenjen na trokut  $ACD$  daje

$$\begin{aligned} \frac{|AC|}{\sin 150^\circ} &= \frac{|CD|}{\sin 10^\circ} \\ \iff |CD| &= \frac{|AC| \cdot \sin 10^\circ}{\sin 150^\circ} \\ \iff |CD| &= 2 \cdot |AC| \cdot \sin 10^\circ. \quad (6) \end{aligned}$$

Trokut  $ACG$  je jednakokračan (zbog  $\sphericalangle CAG = \sphericalangle CGA = 80^\circ$ ). Povucimo visinu  $\overline{CH}$  u trokutu  $ACG$ . Tako je (gledajmo  $\triangle ACH$ )

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ = \frac{|AH|}{|AC|} &\iff \sin 10^\circ = \frac{|AG|}{2 \cdot |AC|} \\ &\iff |AG| = 2 \cdot |AC| \cdot \sin 10^\circ. \quad (7) \end{aligned}$$

Trokut  $AEG$  također je jednakokračan (zbog  $\sphericalangle EAG = \sphericalangle AEG = 50^\circ$ ) pa je

$$|EG| = |AG|. \quad (8)$$

Konačno iz (6), (7) i (8) dobivamo da je

$$|CD| = |EG|. \quad \blacksquare$$

Teško je povjerovati da će netko rješavati ovaj zadatak kao što je pokazano. U svakom slučaju to je zanimljivo za "skupljače" neobičnih (neuobičajenih) rješenja, a moguće je da se kod nekih čitatelja probudi interes da i sami nađu još neka neuobičajena rješenja. Zato je ovaj članak i napisan.

#### LITERATURA

1/ Š. Arslanagić, A. Muminagić, *Više rješenja jednog trigonometrijskog zadatka*, Miš br. 54, godina 11./2010.

## Osijek 2012.

Udruga "Normala" u suradnji s Agencijom za odgoj i obrazovanje organizira drugi stručno-metodički skup

### *Nastava matematike i izazovi moderne tehnologije.*

Skup će se održati u Osijeku od 12. do 14. listopada 2012. godine.

Uz pozvane predavače želimo pružiti priliku i nastavnicima osnovnih i srednjih škola da u kraćim izlaganjima (30 minuta) ili priopćenjima (15 minuta) prikažu neko svoje praktično iskustvo, zanimljiv rad ili ideju. Pozivamo stoga kolege koji na neki od ovih načina žele sudjelovati u radu skupa da do 30. lipnja elektroničkom poštom na adresu [udruga@normala.hr](mailto:udruga@normala.hr) dostave kratak opis svojeg izlaganja. Programski odbor skupa u kratkom će roku obavijestiti autore prihvaća li ili ne takve prijedloge.

Skup je uvršten u Katalog stručnih skupova Agencije za odgoj i obrazovanje i obavijest se može naći na

[http://www.azoo.hr/images/Skupovi2012/2.dio/3.dio/matematika\\_2.doc](http://www.azoo.hr/images/Skupovi2012/2.dio/3.dio/matematika_2.doc)