

Jesu li uistinu opsezi svih krugova međusobno jednaki?



Jasenska Đurović, Rijeka

Zornost je u nastavi matematike vrlo bitna, ali bi učenike trebalo upozoriti da nas zor može i prevariti pa onda i navesti na pogrešne zaključke. To je upozorenje najbolje provesti nekim interesantnim primjerom poput sljedećeg.

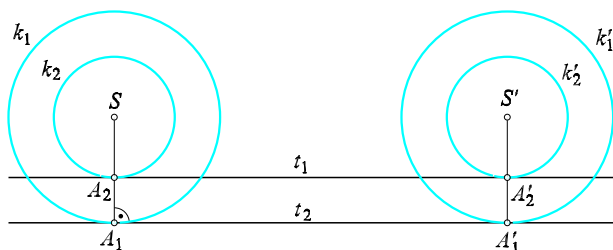
Crtež prikazuje kakav pokus moramo načiniti ili zamisliti.

Krugove $k_1(S, r_1)$ i $k_2(S, r_2)$, $r_1 > r_2$ pažljivo izrežemo i zalijepimo jedan na drugi tako da im se središta poklope. Postavimo tako zalijepljene krugove uspravno na ravnu vodoravnu podlogu. Obilježimo točku dodira većeg kruga i podloge slovom A_1 i nacrtajmo polumjer $\overline{A_1S}$. Nacrtajmo u točki A_1 tangentu

t_1 na rub kruga k_1 . Sjecište polumjera $\overline{A_1S}$ s rubom kruga k_2 označimo slovom A_2 . Nacrtajmo i tangentu t_2 na krug k_2 u točki A_2 .

Kotrlja li se bez klizanja krug k_1 po tangenti t_1 sve dok ne opiše jedan puni okret, puni okret opiše i krug k_2 . Slijepljeni su krugovi k_1 i k_2 tada u položaju k'_1 i k'_2 sa zajedničkim središtem S' , točka A'_1 je točka dodira ruba kruga k'_1 i njegove tangente t_1 a točka A'_2 je točka dodira ruba kruga k'_2 i njegove tangente t_2 .

Očito je $|A_1A'_1|$ opseg O_1 kruga k_1 , a sa slike se čini da je $|A_2A'_2|$ opseg O_2 kruga k_2 .



Uočimo četverokut $A_1A'_1A'_2A_2$. Očito je

$$|A_1A_2| = |A'_1A'_2|$$

jer je $|A_1A_2| = r_2 - r_1 = |A'_1A'_2|$, ali također je

$$A_1A_2 \perp t_1 \quad \text{i} \quad A'_1A'_2 \perp t_1.$$

Budući da su dužine $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A'_1A'_2}$ i pravac t_1 u istoj ravnini, slijedi da je $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{A'_1A'_2}$.

Iz prethodnog slijedi da je četverokut $A_1A'_1A'_2A_2$ pravokutnik, pa onda mora biti i

$$|A_1A'_1| = |A_2A'_2|,$$

tj.

$$O_1 = O_2,$$

odnosno opseg O_1 kruga k_1 jednak je opsegu O_2 kruga k_2 . Budući da su k_1 i k_2 bilo koja dva kruga različitih polumjera, iz jednakosti njihovih opsega slijedi jednakost opsega svih krugova.

Naravno je da dobiveni rezultat nije istinit, iako nas na njega upućuje zor. No, to je ujedno i znak da samo zaključivanje koje počiva na zoru treba uvijek provjeriti. Učinimo to.

Uočimo da je, dok je krug k_1 napravio jedan puni okret bez klizanja po svojoj tangenti i pri tome prešao put duljine $|A_1A'_1|$, što je njegov opseg O_1 , i manji krug k_2 koji je za krug k_1 čvrsto pričvršćen napravio jedan puni okret i prešao put duljine $|A_2A'_2|$. Međutim, opseg O_2 kruga k_2 realno je manji od opsega O_1 kruga k_1 jer je $r_2 < r_1$. To znači da bi krug k_2 napravio jedan puni okret po dužini $\overline{A_2A'_2}$, on se mora uz kotrljanje i klizati. Klizanje na crtežu ne vidimo i upravo nas to navodi na krivi zaključak o jednakosti opsega dvaju krugova različitih polumjera, pa onda i o jednakosti opsega svih krugova.

* * *

PISMENI ISPIT IZ MATEMATIKE NA GIMNAZIJI U POŽEGI

Ponedjeljak, 20. lipnja 1949.

1. Stranice trokuta stoje u geometrijskoj progresiji. Izračunaj stranice, površinu i kut nasuprot najmanjoj stranici, ako je opseg trokuta 9.5 cm, a zbroj prvih dviju stranica za 0.5 cm veći od treće.

2. Kružni isječak rotira oko promjera paralelnog s tetivom luka isječka. Ako je polumjer kružnice $r = 3.729$ a kut isječka 41° , izračunaj volumen tijela koje nastaje rotacijom.

3. Fokus parabole nalazi se u desnom fokusu hiperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$, a vrh joj je u lijevom fokusu hiperbole. Napiši jednadžbu tetive parabole koja prolazi točkom $(-2, 4)$ a polovi je dijametar $y - 6 = 0$.

Koliki kut zatvara asimptota hiperbole s tetivom?