

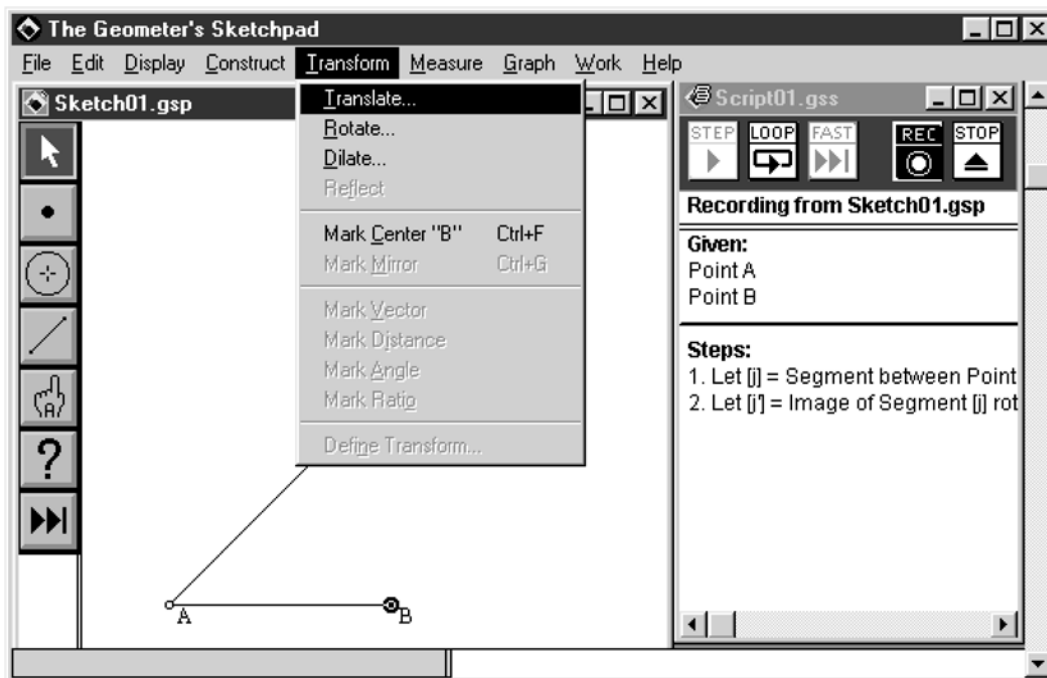
# Nacrtajmo sami fraktal

Šime Šuljić\*, Pazin



Na posljednjoj stranici prošlog broja **MŠ**-a fraktalna je slika cvjetače. Jednostavan postupak nastajanja tog fraktala može se crtati na papiru uz pomoć ravnala i šestara. No rijetko će se tko upustiti u takav opsežan

posao bez uporabe kompjutera. No, što ako ne znamo ili ne želimo upotrijebiti ni jedan programski jezik, već želimo konstruirati na ekranu, upravo onako kako bismo konstruirali na papiru? To se gotovo s lakoćom može



\*sime.suljic@pu.hinet.hr

postići uz pomoć programa *The Geometer's Sketchpad*.

*The Geometer's Sketchpad* računalni je program dinamične geometrije, prvenstveno namijenjen radu u učionici. Pogodan je za demonstraciju nastave matematike, ali i za istraživanje euklidske i neeuklidske geometrije. Predstavljen je na *Kongresu nastavnika matematike*, pa se opće informacije o programu mogu naći u *Zborniku radova*.

U programu se ne mogu crtati fraktali poput Mandelbrotovog skupa, ali je lako izraditi razne fraktalne krivulje. U danim primjerima koji dolaze s programom, nalazimo osam takvih fraktalnih skupova između ostalih: Kochova krivulja i trokut Sierpinskog. Svi ti primjeri imaju ekstenziju *.gss* tj. nalaze se u skript obliku. Uradci na ovom programu mogu se spremati kao *sketch* (skica) s nastavkom *.gsp* ili sačuvati kao zapis programskog koda tj. *script*.

Skript je posebno pogodan za ponavljanje jednih te istih radnji nad novim elementima. To posebno dolazi do izražaja pri crtanju fraktala, gdje je dovoljno nacrtati osnovni oblik do prvog ponavljanja. Skript se ne kreira izravno nego ga se uključuje da bilježi rad na skici. Pri pokretanju programa automatski se otvara i prozor *Sketch01.gsp*. U izborniku *File* treba kliknuti na *New Script*. Sada su otvorena dva prozora: jedan koji ima izbornik s komandama i traku s alatima za crtanje, dok će drugi snimati ono što se crta ako se aktivira dugme *REC*.

---

## Konstrukcija fraktalnog zmaja

Zbog jednostavnosti uzmimo za početak poznati fraktal zmaja. Krene se od dužine koju "lomimo" na dvije jednake dužine prema van, tako da te nove dužine zatvaraju pravi kut. Nove dužine ponovo "lomimo" jednu

prema van, drugu prema unutra itd. Korak po korak to radimo ovako:

1. Nacrtamo dužinu *AB* s dugmetom dužine koje se nalazi u traci s alatima.
2. Strelicom se označi točka *A*. U padajućem izborniku naredbe *Transform* klikne se na podnaredbu *Mark Center "A"*.
3. Označi se dužina *AB* i klikne na podnaredbu *Rotate*. Otvara se dijaloški okvir u koji se upisuje 45 za kut rotacije i klikne na OK.
4. Označi se druga rubna točka *B* i klikne na podnaredbu *Mark Center "B"*. Podnaredbom *Rotate* zarotira se dužina *AB* za  $-45^\circ$ . Na taj način dobije se jednakokratan pravokutan trokut. Njegov treći vrh *C* dobije se podnaredbom *Point At Intersection* u *Construct* naredbi. Podnaredba se aktivira prethodnim označavanjem obje dobivene dužine istovremenim pritiskom tipke *Shift*.
5. Potrebno je skriti dužinu *AB*, kao i druge dvije dužine dobivene rotacijama dužine *AB*. To napravimo tako da te dužine označimo, a zatim kliknemo na podnaredbu *Hide Segment* u *Display* naredbi.
6. Povežimo točku *A* i točku *C* dužinom, a zatim još točku *B* i točku *C*.
7. Sada je potrebno strelicom redom označiti točku *A*, pa točku *C*, a zatim kliknuti na *LOOP* u skriptu. Isto treba napraviti za točke *B* i *C*, upravo tim redosljedom. Treba skriti i točku *C*. Na skriptu pritiskom na *STOP* završi se snimanje. U njemu će se tad nalaziti sljedeći zapis:

Given:

Point A

Point B

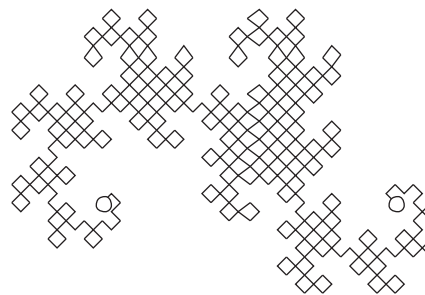
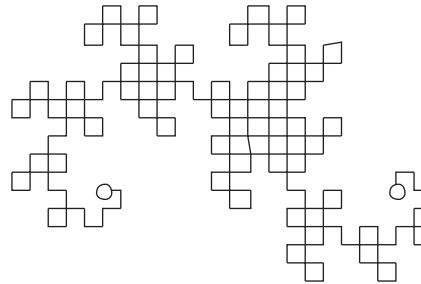
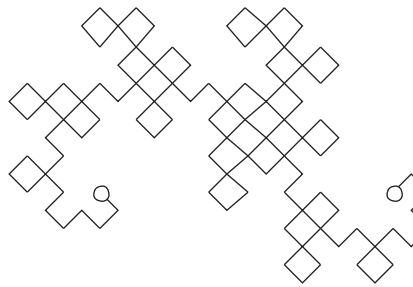
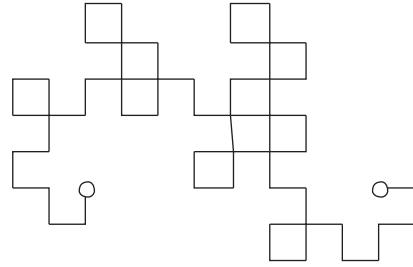
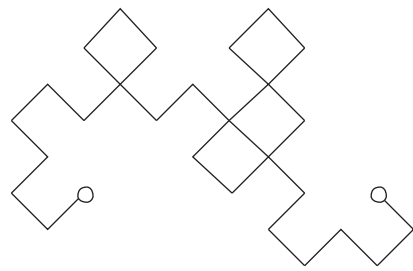
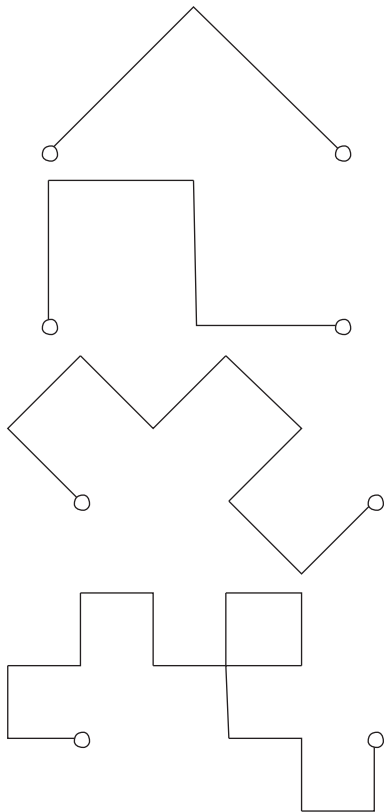
-----

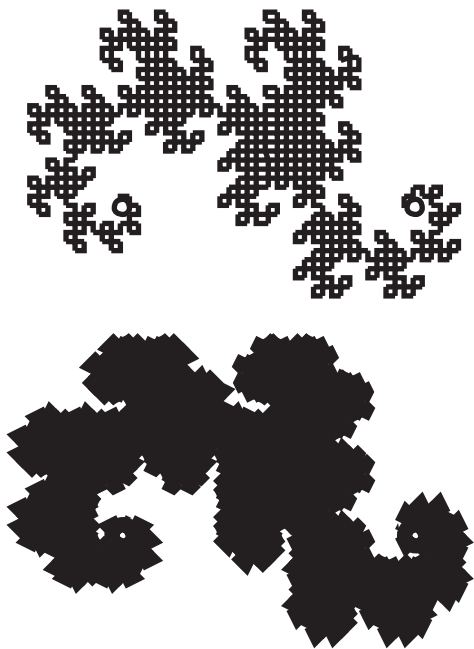
Steps:

1. Let [*j*] = Segment between Point A and Point B.
2. Let [*j'*] = Image of Segment [*j*] rotated 45.00 degrees about center Point A.

3. Let  $[j']$  = Image of Segment  $[j]$  rotated  $-45.00$  degrees about center Point B.
4. Let  $[C]$  = Intersection of Segment  $[j']$  and Segment  $[j]$ .
5. Let  $[k]$  = Segment between Point  $[C]$  and Point A.
6. Let  $[l]$  = Segment between Point  $[C]$  and Point B.
7. Recurse on A and  $[C]$ .
8. Recurse on B and  $[C]$ .

Za izvršenje skripta, potrebno je u novom sketchu nacrtati i označiti dvije točke. Naredbom *STEP* izvršava se samo jedan korak. Naredbom *PLAY* polako se "odmotava" do kraja, a naredbom *FAST* crta se sam kraj. U svakom slučaju, program prije izvršenja pita za broj rekurzija. Nije moguće pretjerivati s velikim brojem, jer se geometrijskom progresijom povećava broj dužina koje se mora crtati. Na nizu sličica vidi se izgled fraktala ako se broj rekurzija kreće od 0 do 10.



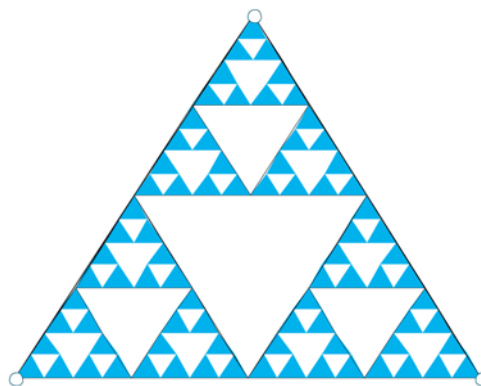
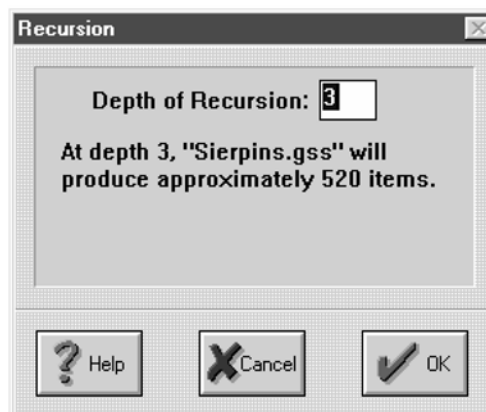


## Konstrukcija trokuta Sierpinskog

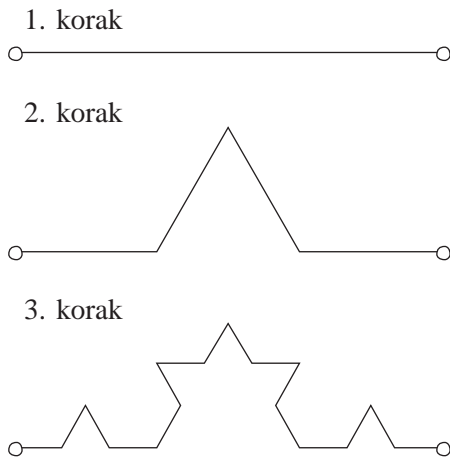
Trokut Sierpinskog trokut je kojem je uklonjen trokut kojem su vrhovi polovišta stranica početnog trokuta. Preostalim trima trokutima ponovno se ukloni trokut koji određuju polovišta stranica itd. Za konstrukciju trokuta Sierpinskog u programu *The Geometer's Sketchpad* otvorimo *New Sketch* i “uključimo snimanje” u *Scriptu*, zatim crtamo korak po korak:

1. Pomoću alata za dužinu nacrtamo trokut  $ABC$ . Označimo vrhove i podnaredbom *Polygon Interior* iz *Construct* menija obojimo njegovu unutrašnjost.
2. Označimo stranice i naredbom *Point At Midpoint* nacrtamo njihova polovišta  $D$ ,  $E$  i  $F$ . Nacrtamo srednjice.
3. Označimo vrhove  $A$ ,  $D$  i  $F$  i obojimo unutrašnjost nekom bojom. Isto napravimo i s vrhovima  $B$ ,  $E$  i  $D$ , te  $C$ ,  $F$  i  $E$ .
4. Skrijmo unutrašnjost trokuta  $ABC$ .

5. Označimo vrhove  $A$ ,  $D$  i  $F$  i kliknimo na petlju u skriptu. Isto napravimo is vrhovima  $B$ ,  $E$  i  $D$ , te  $C$ ,  $F$  i  $E$ .
6. Skrijmo polovišta stranica i srednjice. Zaustavimo skript. Da bi se mogao aktivirati skript, najprije na “skici” nacrtamo i označimo tri točke. Pri pokretanju skripta otvara se dijaloški okvir *Recursion* u koji se upisuje broj rekurzija. S brojem tri dobivamo donju sliku, koju se po volji može povećavati ili smanjivati, a oblik trokuta mijenjati.

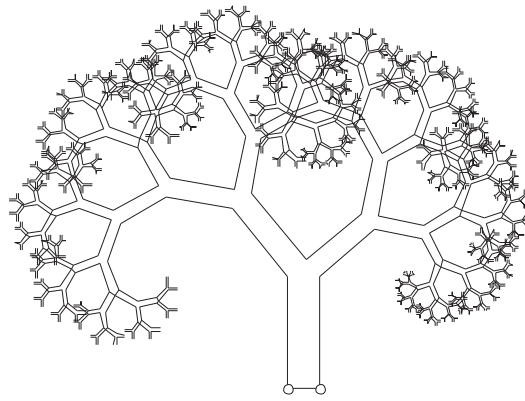


**Zadatak.** Pokušajte sami konstruirati Kochovu krivulju. Za opis poslužimo se slikom u stripu:



Program *The Geometer's Sketchpad* nije prvenstveno namijenjen crtanju fraktalnih krivulja, stoga pri crtanju složenijeg fraktala, kakva je cvjetača, treba upotrijebiti što manji broj operacija. U suprotnom ćemo se već kod malog broja rekurzija suočiti s nedostatkom memorije. Moju cvjetaču možete vidjeti na slici. Pokušajte i Vi. Zaista je zabavno nap-

raviti nešto svoje, a osim toga vjerujem da se može i bolje od ovoga.



Ovakvi skriptovi zauzimaju svega nekoliko kilobajta memorija, dok su u ekstenziji .gss. Zbog toga su vrlo pogodni za razmjenu putem elektronske pošte. No, ovaj program dinamične geometrije ima još mnogo mogućnosti. On je velika blagodat za istraživanje geometrije i izvanredan alat za vizualizaciju nastave matematike. Za moguće upite i razmjenu ideja i uradaka moja e-mail adresa je sime.suljic@pu.hinet.hr.

