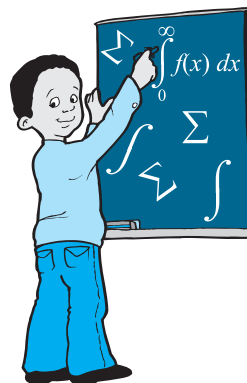


Matematičke sposobnosti

Zdravko Kurnik, Zagreb



Nastavni proces je zajednička aktivnost nastavnika i učenika. Zato uspješnost nastave matematike u velikoj mjeri ovisi o kvaliteti toga odnosa. Ne treba posebno isticati da je lakše raditi u razredu u kojem većina učenika pokazuje interes za matematiku, brzo shvaća, pravilno zaključuje, lako uči. Takvi učenici očitó imaju određene sposobnosti za učenje matematike. U nekom drugom razredu nastavnik se pri izvođenju nastave matematike susreće s nizom teškoća, nastava ne teče glatko, rezultati su slabiji. Tu se susrećemo s jednim od ozbiljnih problema nastave matematike, pa je svakako poželjno da ga detaljnije analiziramo.

Na početku prirodno se nameće pitanje:

Mogu li i trebaju li svi učenici savladati programom predviđeno nastavno gradivo iz matematike i jesu li za to savladavanje potrebne posebne matematičke sposobnosti?

Pitanje je samo na prvi pogled suvišno. Odgovor na njega je potreban, jer se još uvijek u vezi s njime javlja kod mnogih ljudi, posebno roditelja, pa i kod nekih nastavnika matematike, stanovita nedoumica. Svaki nastavnik matematike čuo je ne jedanput neku od sljedećih primjedbi:

“Matematika je težak predmet”. “Program matematike je preopsežan”. “U programu ima previše geometrije”. “Trebalo bi

više geometrije”. “Gradivo nije primjereno uzrastu učenika”. “Udžbenik iz matematike je loš”. “Učenike treba naučiti samo dobro računati”. “Učitelj previše teoretizira”. “Profesor mnogo traži, kao da je matematika najvažnija stvar na svijetu!”. “To nam neće trebati u životu”. “Što će mu matematika, pa on će studirati pravo?!”. “Čemu dokazi učenicima koji se neće baviti matematikom?”. “Učenik je pametan, ali je lijen i ne uči”. “Učenici ne ide, ona nije za matematiku”. “Učenik nema sposobnosti za matematiku”.

Mnogo je sličnih primjedbi u vezi s matematikom. Nije se teško složiti s time da su neke od njih na mjestu. Ali, neke ukazuju i na stanovite zablude. Jedna od tih zabluda, koja za matematičko obrazovanje i psihički razvoj nekih učenika može imati vrlo loše posljedice, krije se u posljednje dvije primjedbe. Postoje li zaista učenici koji “nisu za matematiku”?

Razmotrimo ona pitanja nastave i učenja matematike koja su u uskoj vezi s naslovom ovog članka.

Matematičko obrazovanje

Ubrzan razvoj znanosti i tehnike, kao i pojava novih tehnologija, postavljaju pred

nove generacije mladih ljudi sve veće zahtjeve u pogledu opsega znanja, ovladavanja novim područjima kao što su informatika, statistika, programiranje, rad uz pomoć kompjutera, poznavanje metoda znanstveno-istraživačkog rada i sposobnosti kreativne primjene znanja, te brzog usvajanja novih znanja i metoda. Za taj razvoj znanosti, tehnike, pa i društva u cjelini, matematika je od posebnog značaja. Izmjenama nastavnih planova i programa matematike nastoji se u nastavi prenijeti učenicima što više znanja koja prate navedeni napredak i omogućavaju njihov nesmetani budući rad.

Dobro matematičko obrazovanje i matematički način mišljenja **nužni su** danas ne samo matematičarima i znanstvenicima u srodnim znanostima, već i ljudima u mnogim drugim područjima u kojima se oni u svakodnevnom životu ne bave matematikom, ili za njihovu životnu djelatnost matematika nije od neke posebne važnosti, ali su im takva znanja i mišljenje vrlo korisni (biologija, pravo, lingvistika, medicina, povijest i dr.).

Odgovor na pitanje o potrebi dokazivanja u nastavi matematike može se naslutiti iz sljedeće nepobitne istine: **učiti dokazivati** znači **učiti rasuđivati**, a to je jedan od osnovnih zadataka nastave matematike. Rasuđivati u životu treba svaki čovjek. Tako vlastito rasuđivanje presudnu ulogu igra pri uspoređivanju različitih tvrdnji, izdvajanju iz više izjava onih koje su istinite, provjeravanju valjanosti nekog sumnjivog dokaza, opovrgavanju nečijeg mišljenja, donošenju ispravnog zaključka o nečemu, izboru primjerenog sadržaja za neku temu i sl. Zato učiti dokazivati treba svaki učenik. Štoviše, obrazovanje učenika nije potpuno ako on tijekom školovanja nije upoznao i shvatio dokaze nekoliko standardnih matematičkih poučaka. Posebno su važni dokazi geometrijskih poučaka, jer oni učenicima pružaju pravu priliku upoznavanja ideje strogog zaključivanja. Time se djelomično odgovara i na pitanje o potrebi i ulozi geometrije u nastavi matematike.

Da bi se primjereno odgovorilo na zahtjeve društva i najpovoljnije doprinijelo njegovom razvoju i usavršavanju obrazovanja, pred suvremenu nastavu matematike se kao nužnost i glavni zadatak postavlja **razvoj matematičkih sposobnosti i matematičkog mišljenja** učenika.

Matematičke sposobnosti

Svaki učenik **ima** određene sposobnosti koje su dovoljne za praćenje, savladavanje i usvajanje matematičkih sadržaja propisanih nastavnim programom. Te sposobnosti trebaju mu omogućiti razumijevanje osnovnih matematičkih pojmova, ideja i metoda, te samostalno rješavanje standardnih zadataka. Međutim, uspješnost tog procesa ovisi o ispunjavanju nekoliko važnih preduvjeta. Ti preduvjeti su: primjeren izbor matematičkih sadržaja u nastavnom programu za odgovarajući uzrast učenika, dobri udžbenici i vježbenice, kvalitetno izvođenje nastave, a najvažniji su sklonost učenika prema matematici i svakodnevni sistematični rad. Učenici nisu uvijek svjesni koliko su sposobni. Njihove sposobnosti su nerijetko veće nego što sami pretpostavljaju.

Što podrazumijevamo pod matematičkim sposobnostima? Sposobnost usvajanja što više nastavnog gradiva? Dobro pamćenje matematičkih činjenica? Ne. Osnovni cilj nastave matematike koji se postavlja pred svakog učenika ne smije biti puko usvajanje gradiva propisanog programom i stjecanje znanja koja se temelje na nizu pravila, formula i umijeća rješavanja standardnih zadataka. Umjesto preopterećivanja pamćenja učenika velikim brojem činjenica treba pobuđivati i pokretati njegovo mišljenje, postupno i primjereno učiti ga analizirati, sintetizirati, generalizirati, specijalizirati, apstrahirati, konkretizirati, inducirati, deducirati. Na taj način stečeno znanje i pamćenje činjenica postaju samo pomoćna sredstva pri praktičnom

radu kao što su dokazivanje poučaka i rješavanje problema. Tu se onda javljaju i dolaze do punog izražaja matematičke sposobnosti učenika.

Evo nekih od tih matematičkih sposobnosti:

- 1) *sposobnost brzog izvođenja računskih operacija,*
- 2) *sposobnost lakog izvođenja složenijih računskih operacija,*
- 3) *sposobnost vještog transformiranja složenih algebarskih izraza,*
- 4) *sposobnost nalaženja uspješnih i nestandardnih načina rješavanja jednadžbi,*
- 5) *sposobnost lakog i jasnog predočivanja prostornih objekata i odnosa,*
- 6) *sposobnost lakog razumijevanja i ulaženje u bit problema,*
- 7) *sposobnost provođenja duboke analize,*
- 8) *sposobnost otkrivanja različitih načina rješavanja problema,*
- 9) *sposobnost uočavanja i postavljanja novih problema,*
- 10) *sposobnost stvaranja i iznošenja novih ideja,*
- 11) *sposobnost izvođenja pravilnog logičkog rasuđivanja,*
- 12) *sposobnost uspoređivanja i povezivanja dobivenih rezultata,*
- 13) *sposobnost uspostavljanja analogija,*
- 14) *sposobnost poopćavanja,*
- 15) *sposobnost specijaliziranja,*
- 16) *sposobnost apstrahiranja,*
- 17) *sposobnost konkretiziranja.*

Matematičke sposobnosti susrećemo u raznim kombinacijama. Učenik može imati jednu ili nekoliko matematičkih sposobnosti, ali već razvoj samo jedne od tih sposobnosti može značiti mnogo. Ako se s njom još povežu kreativne osobine učenika kao što su *radoznalost uma, oštroumnost, ustrajnost, samostalnost, maštovitost, dosjetljivost*, može se od njega očekivati vrlo uspješan rad u području matematike i dobri rezultati.

Nastava matematike i problemi

Nastava matematike je složen i vrlo zahtjevan proces. Njezina uspješnost ovisi o mnogo činitelja, pa to može prouzročiti niz problema. Problemi posebno nastaju ako nije ispunjen neki od ranije navedenih preduvjeta za učenikovo praćenje, savladavanje i usvajanje matematičkih sadržaja propisanih nastavnim programom. Opišimo neke od tih problema.

Prvi problem pojavljuje se već na samom početku ostvarivanja nastavnog programa matematike ako se ustanovi da je on **preopsežan**, a odgovarajući udžbenik neprikladno i metodički **slabo** obrađuje njegov sadržaj. U tom slučaju uspješnost nastave matematike ovisi samo o nastavniku i njegovoj umješnosti izvođenja nastave. Njegova kreativnost često može uz odgovarajući napor nadoknaditi manjkavosti programa i udžbenika. Ne uspije li pak on pronaći i razraditi najbolji način izvođenja nastave, neće pomoći nikakve matematičke sposobnosti učenika, bit će oštećeni svi.

U svakom razredu mogu se naći učenici koji pokazuju interes za matematiku, imaju želju da je nauče, ali **ne znaju učiti** matematiku. Umijeće učenja matematike ne dolazi samo od sebe, već kao rezultat zajedničkog napora nastavnika i učenika. Na žalost, u našim školama umijeću učenja ne poklanja se dovoljno pozornosti. Doduše, ne postoji strogo pravilo kako treba učiti matematiku, već više iskustveno pravilo koje kaže da se najprije uči teorija, upoznaju definicije novih pojmova, proučavaju poučci i njihovi dokazi, a onda se prelazi na rješavanje odgovarajućih zadataka koji će pokazati stupanj usvojenosti teorije.

Zanemarivanje teorije i pokazivanje pretjeranog interesa za rješavanje zadataka mogu dovesti do zastoja u razvoju matematičkog mišljenja i matematičkih sposobnosti učenika, a može se desiti i **gubitak** nekih od njih.

Ne smije se dopustiti gubitak matematičkih sposobnosti ni jednog učenika.

U svakom razredu sjede učenici s posebnim sklonostima i sposobnostima za dublje razumijevanje matematike. U nastavi matematike koja je pretežno usmjerena na izvršavanje plana i opsežnog programa nerijetko su najviše zapostavljeni upravo ti najsposobniji učenici. Oni u početku uče s lakoćom i veseljem, a onda, budući da **nisu primjereno opterećeni** i da mogu bez napora usvojiti ono što se od njih traži, stječu pogrešan dojam da za učenje matematike i ne treba veliki napor ili postupno gube volju za učenjem. Važan dio njihovih matematičkih sposobnosti miruje i ne razvija se. Metodika rada s takvim učenicima zaslužuje posebnu pozornost.

U svakom razredu mogu se naći učenici koji nemaju naviku ni želje za sistematičnim i ustrajnim radom, predznanje im je slabo, sve im je teško, gradivo iz matematike uče površno, domaće zadaće su im suvišan teret pa ih ne pišu ili ih prepisuju, teško prelaze iz razreda u razred. Razlog svog predvidljivog neuspjeha nalaze u spasonosnoj izjavi “ja nisam za matematiku”. Najgore je pri tome to što neki od njih tijekom vremena počinju sumnjati u svoje sposobnosti i zaista vjerovati u svoju izjavu. Takav stav često se pri izboru njihovog životnog poziva kosi sa željama i ambicijama njihovih roditelja, pa i njih samih. S druge strane, mogu se naći i nastavnici matematike koji opravdanje za svoje slabo izvođenje nastave i stalan neuspjeh nekog svog učenika traže u izjavi “učenik nema matematičkih sposobnosti”. Tako se “stvaraju” učenici koji **“nisu za matematiku”!**

Veći broj slabih ocjena iz matematike u odnosu na druge nastavne predmete najčešće se opravdava nedostatkom matematičkih sposobnosti kod učenika i tvrdnjom da je matematika **težak** predmet. Prvi razlog, kao što smo ranije istakli, ne stoji, dok u tvrdnji da je matematika težak predmet ima dosta istine. Međutim, pravi razlog većeg broja slabih ocjena treba tražiti u naravi matematike i načinu

rada u njoj. Pojmovi koji se u njoj razmatraju su apstraktni, gradivo je logički čvršće povezano, težina postupno raste, a stečeno znanje treba znati primijeniti. Savladavanje i usvajanje gradiva zahtijeva samostalan, sistematičan i neprekidan rad. Jesu li naši učenici naviknuti na takav rad?

Duži **prekid** praćenja nastave i učenja matematike teško se nadoknađuje. Ova se činjenica često ističe kao još jedan dokaz težine matematike. To kao posljedicu svog kampanjskog učenja brzo osjete slabiji učenici. Za njih je to gotovo nesavladiva teškoća. Ali za savladavanje ove teškoće trebaju i bolji učenici više vremena i dodatni napor.

Razvoj matematičkih sposobnosti

Matematičke sposobnosti ispoljavaju se obično vrlo **rano**. To omogućuje već učitelju matematike njihovo pravovremeno uočavanje, neprekidno praćenje i djelotvorno utjecanje na njihov daljnji razvoj. Tu ulogu preuzima kasnije profesor matematike. Budući da se matematičke sposobnosti slabijih i naprednijih učenika mogu znatno razlikovati, potreban je pažljiv i primjeren pristup razvoju i jednih i drugih.

Njegovanje i razvoj matematičkih sposobnosti slabijih učenika kreće se pretežno u okvirima redovne nastave.

Već je ranije istaknuto da i dobra redovna nastava ne može u potpunosti zadovoljiti potrebe i interese određenog broja učenika s posebnim sklonostima i sposobnostima za dublje razumijevanje matematike. To su učenici koji uz odgovarajući rad mogu kasnije dati natprosječne rezultate. Ta činjenica nameće potrebu da se uvode i njeguju posebne aktivnosti koje omogućuju što ranije otkrivanje takvih učenika i usmjeravanje i praćenje njihovog rada. Prvi korak pri rješavanju problema rada s naprednijim učenicima su **dodatni zadaci** u redovnoj nastavi.

Osim redovne nastave postoje i **druge mogućnosti** s kojima nastavnik matematike može razvijati matematičke sposobnosti i matematičko mišljenje svojih učenika. To su: dodatna nastava, izborna nastava, matematičke grupe, seminari, matematički časopisi, matematička literatura, matematička natjecanja i dr.

Posebno su **važna** matematička natjecanja. Jedan od ciljeva natjecanja je pobuđivanje interesa za učenje matematike. Na pojedinim natjecanjima mogu sudjelovati svi učenici, ne samo najbolji. Tako je iznimno velik interes učenika različitih matematičkih sposobnosti za međunarodno natjecanje “Klokan bez granica”. Na natjecanjima se učenicima ispunjava prirodna želja da provjere svoje matematičke sposobnosti. Obično naj-sposobniji učenici postižu i najbolji uspjeh. Međutim, dugogodišnje praćenje natjecanja pokazuje da se često i naši najbolju učenici dobro ne snalaze u rješavanju nekih složenijih i nestandardnih matematičkih problema. Manjkaju im neka znanja, ne poznaju neke jednostavne metode rješavanja matematičkih problema i postižu slabe rezultate. Podrobna analiza tih rezultata otkriva da neke njihove matematičke sposobnosti, obzirom na njihov uzrast, nisu dovoljno razvijene. Razlog slabih rezultata može ležati i u naglom prijelazu sa standardnih na rješavanje problemskih zadataka. Zato je nužno sposobnost rješavanja problemskih zadataka razvijati i njegovati trajno i neprekidno.

Nešto kao zaključak

Matematičke sposobnosti učenika i njihov razvoj u članku su opisani u kratkim crtama. Cilj članka je bio da se postave neka pitanja i ukaže na neke probleme nastave matematike čije rješavanje može doprinijeti njezinom poboljšanju. Poboljšanje nastave matematike treba pak provesti tako da ona bude dostupna i zanimljiva za većinu učenika, a ne samo za mali broj izabranih. Razmatranja postavljenih pitanja nastave i učenja matematike koja su u uskoj vezi s matematičkim sposobnostima učenika možemo sažeti u sljedeće odgovore:

- 1) Svaki učenik **treba** savladati programom predviđeno nastavno gradivo.
- 2) Svaki učenik **ima** potrebne matematičke sposobnosti.
- 3) Svaki učenik **može** svladati programom predviđeno nastavno gradivo.
- 4) **Ne postoje** učenici koji “nisu za matematiku”.

Literatura

- [1] B.V. Gnedenko, *O matematičeskijh sposobnostjah i ih razvitii*, Matematika v škole 1 (1982), 31–34.
- [2] A.N. Kolmogorov, *O professii matematika*, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1959.
- [3] Z. Kurnik, *Suvremena metodika i nastava matematike*, Zbornik radova 1. kongresa nastavnika matematike Republike Hrvatske, Zagreb 2000, 187–201.

Često se preuveličava potreba posebnih sposobnosti za učenje i razumijevanje matematike.

Prosječne ljudske sposobnosti potpuno su dovoljne da se uz dobro vođenje ili pomoću dobrih knjiga ne samo usvoji srednjoškolska matematika, nego da se i razumiju osnove diferencijalnog i integralnog računa.

Samo se po sebi razumije da nikakve sposobnosti neće pomoći bez ljubavi prema svome djelu, bez sistematičnog svakodnevnog rada.

A. N. Kolmogorov