

# Kombinatorika

## Primjeri uspješnog učenja

### *Željka Vrcelj*

*“Zamislite neku veličanstvenu planinu s granitnim vrhuncima koji se uzdižu stotinama metara prema nebu. Ništa ne može izgledati nedodirljivije od takve divovske utvrde stijena. Ipak, s vremenom, moguće je određenim silama tu planinu pretvoriti u sićušne kamenčiće. Što je najironičnije, sile koje raspolažu takvom snagom pripadaju u red najblažih i najpodatnijih prirodnih elemenata – to su voda i zrak! Vjetar i mirni potoci mogu nadvladati i najmoćnije planine.”*

*(J. M. Templeton, Knjiga životnih zakona)*

Projekt “Kvalitetna škola” temelji se na Glasserovoj teoriji izbora i rukovođenju vođenjem.

Za razliku od prihvaćenog uvjerenja koje ponašanje objašnjava reakcijom na vanjske podražaje, teorija izbora tvrdi da je ponašanje motivirano iznutra. Svako naše ponašanje naš je izbor, u određenom trenutku za nas najbolji koji smo pronašli da bismo zadovoljili jednu ili više osnovnih ljudskih potreba (pripadanje, moć, sloboda, zabava). Teorija izbora upućuje nas da možemo mijenjati svoje ponašanje, ali ne i ponašanje drugih ljudi. Ova je ideja presudna za razvijanje dobrih međuljudskih odnosa.

Kako bi rad u školama postao kvalitetan, nužno je rukovođenje vođenjem. Ravnatelj i nastavnici trebaju biti voditelji, tj. neprekidno poboljšavati komunikaciju – međusobno, te s učenicima i njihovim roditeljima, zatim

iz svakog odnosa eliminirati prisilu i strah i poticati proces samoprocjene. Znati slušati i ne kritizirati, ključ je uspješne komunikacije.

Željeznička tehnička škola Moravice, u kojoj radim kao profesor matematike i fizike, uključena je u projekt “Kvalitetna škola”. Želimo li doista kvalitetnu školu, ne možemo preslikati tuđi program. Pronađimo vlastiti put. Kvalitetni se odnosi temelje na povjerenju, uvažavanju, odgovornosti, suradnji i timskom radu. Uz naporan rad i dovoljno vremena, te korisne informacije problemske zadatke bazirane na stvarnim životnim situacijama, svaki učenik može uspjeti.

Osvrnut ću se na timsko učenje permutacija s ponavljanjem, domaće zadaće iz kombinatorike i testiranje kombinatorike. Nastavna cjelina Kombinatorika obrađuje se 20 školskih sati u 4. razredu programa za zanimanje ekonomist.

## Permutacija s ponavljanjem (vježba) – 2 sata

Učenici su raspoređeni u grupe po četvero. U svakoj grupi nalaze se vrlo uspješni, srednje i manje uspješni učenici.

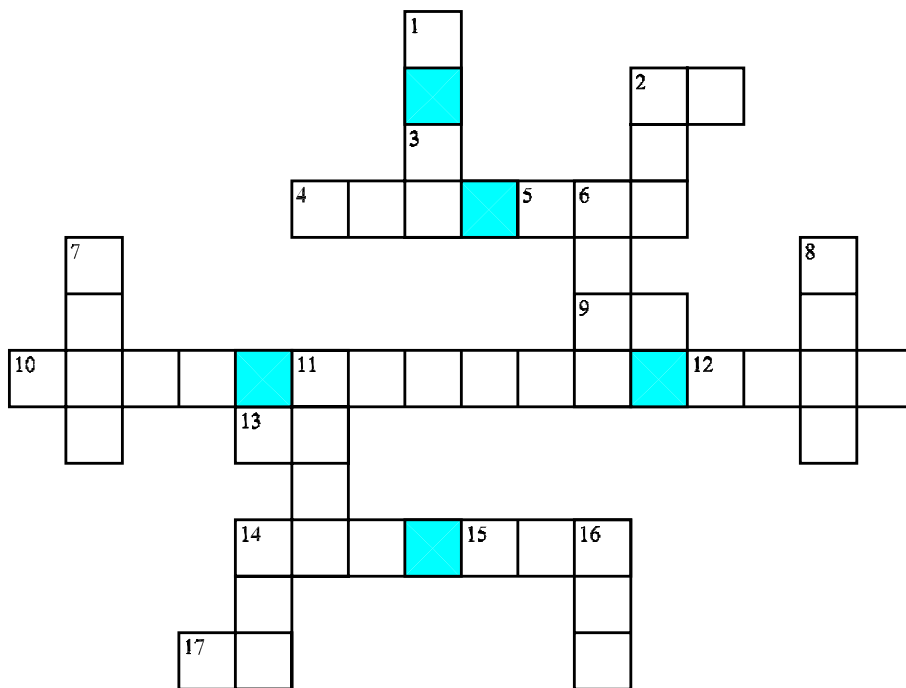
### Zadatak.

Riješite križaljku, tj. vodoravno i okomito unesite rješenja navedenih zadataka. Manje uspješni učenici pojedinačno će rješavati lakše zadatke, srednje uspješni (u paru) za-

datke srednje težine, a vrlo uspješni učenici, također pojedinačno, teže zadatke. Na raspolaganju imate 35 minuta. S ostalim članovima tima 10 minuta komentirajte rješenja.

Pripremite kooperativnu prezentaciju u kojoj će sudjelovati svi članovi tima. Predat ćete i zajedničko pismeno obrazloženje rezultata, uz riješenu križaljku. Imate pola sata da napišete pismeno obrazloženje i pripremite prezentaciju rezultata. Timovi će naizmjenično obrazložiti rezultate pojedinih zadataka, upisujući ih u križaljku nacrtanu na grafofoliji.

Sretno!



### VODORAVNO:

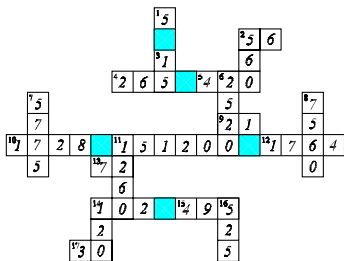
1. Odredi prirodni broj  $n$  ako je  $\binom{7}{6} \cdot \binom{n}{4} - \binom{n+2}{4} = 0$ .
2. Izračunaj  $\binom{8}{3}$ .
4. Koliko se peteroznamenastih brojeva može napisati od znamenaka broja 62 774 277?
5. Na koliko se načina monom  $a^2b^2c^4$  može prikazati kao produkt osam faktora  $a, a, b, b, c, c, c, c$ ?

9. Izračunaj  $\overline{P}_7^{5,2}$ .
10. Odjeljak u vagonu vlaka ima dva reda sjedala, u svakom redu po četiri sjedala. Od osam putnika, njih troje želi sjediti licem okrenutim u smjeru vožnje, dva putnika u suprotnom smjeru, dok je preostaloj trojici svejedno kako sjede. Na koliko se načina putnici mogu razmjestiti u odjeljku?
11. Koliko se različitih riječi (smislenih i besmislenih) može napisati od svih slova riječi MATEMATIKA?
12. Koliko se trijadnih zapisa može sastaviti pomoću triju nula, pet jedinica i dvije dvojke? (Trijadni zapis je niz od nekoliko nula, jedinica i dvojki, takav da prvi član nije nula.)
13. Izračunaj  $\binom{8}{0} + \binom{8}{2} + \binom{8}{4} - \binom{8}{6} + \binom{8}{8}$ .
14. Koliko se četveroznamenastih brojeva može napisati od znamenaka broja 245 325?
15. U učionicu treba unijeti 4 klupe i 8 stolica. Na koliko je načina to moguće učiniti?
17. Izračunaj  $\overline{P}_6^4$ .

### OKOMITO:

2. Koliko permutacija niza 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 počinje s 1?
3. Odredi prirodni broj  $n$  ako je  $\binom{n}{1} + \binom{n+2}{2} = 151$ .
6. Na koliko se načina 10 predmeta može razdijeliti u tri skupine, tako da u prvoj budu 3 predmeta, u drugoj 2, a u trećoj 5 predmeta?
7. U tri grupe treba rasporediti 12 osoba, u svaku po četiri. Na koliko je načina to moguće učiniti?
8. Na koliko se načina mogu poredati u niz 2 zelene, 3 plave, 2 crne i 2 bijele kuglice?
11. Izračunaj  $\overline{P}_9^{4,3,2}$ .
14. Koliko se šesteroznamenastih parnih brojeva može napisati od znamenaka 1, 2, 2, 3, 4, 4?
16. Povodom Dana škole organizirana je priredba. Prijavljene su 4 recitacije, 3 plesne točke, 4 instrumentalne izvedbe i 2 recitala. Odlučeno je da se priredba podijeli u dva dijela, tako da se u prvom izvedu recitacije i recitali, a u drugom dijelu plesne točke i instrumentalne izvedbe. Na koliko je načina moguće organizirati ovu priredbu?

### Rješenje križaljke:



Obvezatne **domaće zadace** možda su glavni razlog što toliko učenika izbacuje ško-

lu iz svog svijeta kvalitete. Istaknimo važnost rada u razredu, a neobvezatnim domaćim zadacima u kojima se traži sposobnost zaključivanja, te logičke i geometrijske procjene, potičimo inicijativu, odlučivanje i stvaralaštvo učenika.

### Primjeri:

1. biografije matematičara koji su postigli zapažene rezultate iz kombinatorike (Guldin, Leibniz, Jacob Bernoulli)

2. određivanje igrača karte
3. spajanje točaka
4. magični kvadrat
5. zadatak sa šibicama
6. raspored kuglica

Biografije navedenih matematičara i navedeni zadaci ne nalaze se u knjizi

J. Đurović, I. Đurović i S. Rukavina, Matematika za 4. razred ekonomskih škola (udžbenik i zbirka zadataka), Neodidacta, Zagreb, 2000.

Potrebno je koristiti dodatnu literaturu:

1. I. Gusić, Matematički rječnik, Element, Zagreb, 1995.
2. R. Risojević, Veliki matematičari, Nolit, Beograd, 1987.
3. V. Devidé, Gros (tucet tuceta) matematičkih zadataka, HMD/Element, Zagreb, 1995.

Pismena provjera znanja, tj. **testiranje** kombinatorike provedeno je na problemskim zadacima iz stvarnog života.

#### Primjeri:

1. lomljenje štapa, lomljenje čokolade ili rezanje maslaca
2. crvena i zelena signalna svjetla
3. signalne zastavice brodova
4. mreža puteva

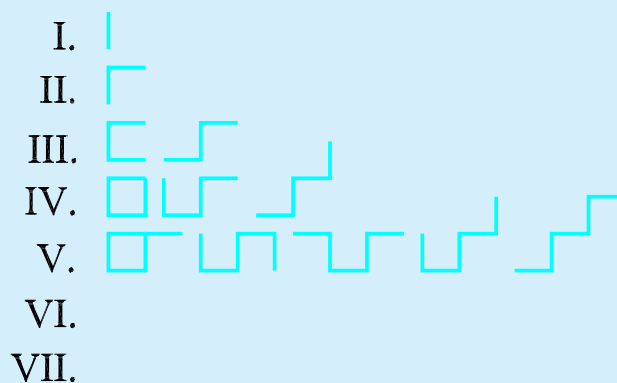
5. šahovska ploča
6. razmnožavanje zečeva ili bakterija
7. problem trgovačkog putnika.

Koristila sam sljedeću literaturu:

1. V. Devidé, Gros (tucet tuceta) matematičkih zadataka, HMD/Element, Zagreb, 1995.
2. D. Veljan, Matematika za 4. razred srednjih škola (udžbenik i zbirka zadataka s rješenjima), Školska knjiga, Zagreb, 1997.

Pri testiranju učenici mogu koristiti svoje bilješke, udžbenik, zbirku zadataka i dodatnu literaturu. Pomoć mogu zatražiti od vrlo uspješnih učenika iz razreda ili nastavnika. Ukoliko rad učenika nije zadovoljavajući, učenik kod kuće dodatno radi na testu, dok ne postigne potrebnu razinu kvalitete.

Cilj ovakvog načina poučavanja je razvijanje vještina razmišljanja učenika na višoj razini i vještina surađivanja. Određeni pojmovi moraju biti usvojeni do razine automatizma, no ne zahtijeva se učenje napamet. Naglasak je na shvaćanju informacija i primjeni znanja, čime se povećava interes i motivacija učenika. Zadaća je nastavnika otkriti tajne uspješnog učenja, te ponovno pronaći radosti učenja iz djetinjstva. Na tom putu pomažu nam vlastite misli na papiru, ljubav i sloboda.



*Nastavi niz po istom pravilu. Obrati pažnju na broj elemenata u svakom retku!*