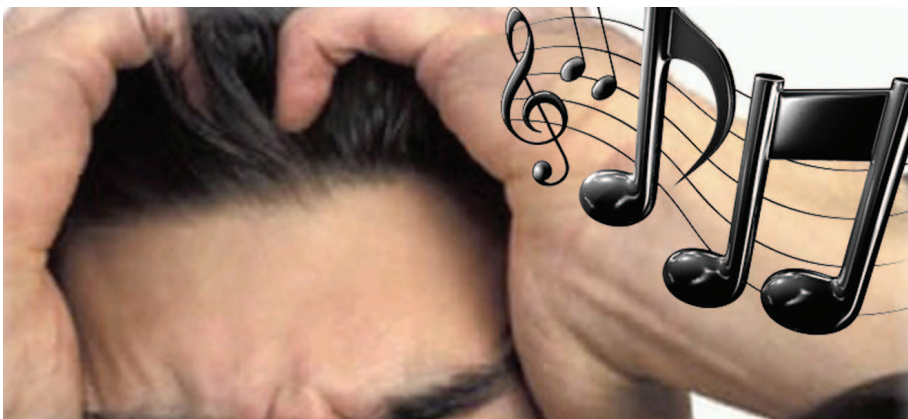


Matematičareva jadikovka

1. dio



Paul Lockhart, New York, SAD

Probudi se muzičar iz strašne noćne more. U svome se snu našao u društvu u kojem je glazbeno obrazovanje obvezno. "Pomažemo učenicima da postanu konkurentniji u zvukom sve ispunjenijem svijetu." Za taj vitalan projekt zaduženi su pedagozi, školski sustav i država. Načinjene su studije, osnovani su odbori i donesene su odluke – a sve bez savjeta ili sudjelovanja ijednog aktivnog glazbenika ili kompozitora.

Kako su glazbenici poznati po tome da svoje ideje zapisuju u obliku partitura, te čudesne crne točkice i crte moraju tvoriti "glazbeni jezik". Nužno je stoga da učenici, ukoliko žele postići određeni stupanj glazbene stručnosti, tečno barataju tim jezikom – zaista, bilo bi smiješno očekivati od djeteta da pjeva pjesmu ili svira neki instrument, a da prije toga nije temeljito upoznalo osnove glazbene notacije i glazbenu teoriju. Sviranje i slušanje glazbe, a da i ne spominjemo komponiranje originalnog djela, smatrane su vrlo naprednim temama koje su ostavljene za više razrede srednjih škola, a najčešće za fakultete.

Što se tiče osnovnih i srednjih škola, njihov je zadatak istrenirati učenike u korištenju tog jezika – naučiti ih da se koriste simbolima prema zadanom skupu pravila: "Na satu glazbenog odgoja vadimo svoje kajdanke, učitelj na ploču zapisuje note koje mi prepisujemo ili ih prebacujemo u drugi ključ. Moramo biti sigurni da smo ispravno napisali notne ključeve i njihove oznake, naš učitelj je vrlo pedantan i ustrajan u zahtjevu da potpuno zacrnimo svoje četvrtinke. Jednom prilikom smo rješavali zadatak s kromatskom ljestvicom i ja sam ga ispravno riješio, ali mi učitelj nije priznao rješenje jer su mi notni vratovi bili okrenuti naopako."

Pedagozi su u svojoj mudrosti ubrzo shvatili da ovakvu vrstu glazbenog poučavanja mogu provoditi čak s vrlo malom djecom. U stvari, smatralo se vrlo sramotnim kad neki trećaš ne bi potpuno zapamtio svoj kvintni krug. "Moram svom sinu pronaći instrukcije. On se jednostavno ne može primiti domaće zadaće iz glazbenog. Kaže da je dosadna. Samo sjedi, bulji kroz prozor, zviždi melodije i smišlja smiješne pjesme."

U višim razredima pritisak je još veći. Naposljetku, učenici se moraju spremati za standardizirane testove i primarne ispite. Moraju pohađati nastavu iz ljestvica i modova, metrike, harmonije i kontrapunkta. Puno je toga za učenje, ali kasnije na studiju, kad napokon dožive sve te stvari, zaista će cijeniti sav uloženi trud." Naravno, ne ide stvarno mnogo učenika na glazbeni studij, tako da samo nekolicina zapravo čuje zvuk koji predstavljaju crne točkice. Ipak, važno je da svaki član društva može prepoznati modulaciju ili prijelaze u fugama, neovisno o činjenici da to nikada neće čuti. "Iskreno, većina učenika zapravo nije glazbeno nadarena. Na nastavi se dosađuju, njihove su vještine grozne, a domaće zadaće su im jedva čitljive. Većina ih uopće ne mari za važnost glazbe u današnjem svijetu; oni samo žele imati što je moguće manje nastavnih sati iz glazbe i da što prije zavriše s tim. Pretpostavljam da jednostavno postoje muzikalni i nemuzikalni ljudi. Iako, imao sam jednu učenicu – čovječe, bila je senzacionalna! Partiture su joj bile besprijeke – svaka nota na pravome mjestu, savršena kaligrafija, povelice, snizilice, upravo prekrasno! Jednog će dana postati vrhunska glazbenica."

Probudivši se u hladnom znoju, muzičar je sav sretan shvatio da je sve bio samo ludi san. "Naravno!", uvjeravao je sam sebe, "niti jedno društvo ne bi tako lijepu i

smislenu umjetnost svelo na nešto tako besmisleno i trivijalno; niti jedna kultura ne bi bila tako okrutna prema svojoj djeci da ih liši tako prirodnog i zadovoljavajućeg načina ljudskog izražavanja. Kako apsurdno!”

U međuvremenu, na drugom kraju grada, slikar se upravo probudio iz slične noćne more...

Iznenadio sam se našavši se u školskoj učionici – bez štafelaja i bez tuba s bojama. “Oh, mi zapravo ne slikamo sve do srednje škole,” rekoše mi učenici. “U sedmom razredu uglavnom proučavamo boje i primjene.” Pokazali su mi radni list. Na jednoj strani bili su uzorci boja s praznim mjestima do njih. Rečeno im je da upišu imena. “Ja volim likovni,” napomenuo je jedan od njih, “kažu mi što da napravim i ja to napravim. Lako je!”

Nakon nastave, razgovarao sam s učiteljem. “Zar vaši učenici u stvari ništa ne slikaju?” pitao sam. “Paa, sljedeće godine slušaju predmet *Uvod u bojenje po brojevima*. On ih priprema za glavni predmet *Bojenje po brojevima* koji se nastavlja u srednjoj školi. Tako će uspjeti iskoristiti ovdje stečeno znanje i primijeniti ga u stvarnim životnim likovnim situacijama: pri uranjanju kistova u boje, brisanju kistova i slično. Naravno, učenike pratimo prema njihovoj nadarenosti. Najbolji likovnjaci – oni koji znaju imenovati sve boje i kistove redom i unatrag – oni do slikanja dođu nešto ranije, a neki od njih čak slušaju *Napredno bojenje po brojevima* i time stječu prednost za fakultet. No, najčešće djeci želimo prenijeti samo osnove likovnog, tako da, kad odu odavde u stvarni svijet, znaju obojiti kuhinju, a da ne naprave totalni nered.”

“Hm, ti srednjoškolski predmeti koje spomenuste...”

“Mislite na *Bojenje po brojevima*? Primjećujemo da je u posljednje vrijeme broj upisanih učenika mnogo viši. Mislim da je to uglavnom radi roditelja koji žele biti sigurni da će im se dijete upisati na dobar fakultet. Ništa ne izgleda bolje od *Naprednog bojenja po brojevima* u srednjoškolskoj svjedodžbi.”

“Zašto fakulteti brinu znamo li pridružiti brojevu oznaku odgovarajućoj boji?”

“Oh, pa, znate, to pokazuje bistru glavu i logičko razmišljanje. I naravno, ako student želi dobiti diplomu iz neke od likovnih vještina, kao na primjer mode ili unutarnjeg dizajna, tada je zaista dobra ideja da se potrebe za slikanjem uklone u srednjoj školi.”

“Razumijem. A kada studenti dolaze do slobodnog slikanja, na praznom platnu?”

“Vi zvučite kao jedan od mojih profesora! On je neprestano govorio o izražavanju samoga sebe i svojih osjećaja i sličnim stvarima – zaista jako apstraktnim stvarima. Ja osobno posjedujem diplomu iz *Bojenja*, a zapravo nikad nisam stvarno radio s čistim platnima. Jednostavno koristim pribor uz *Bojenje po brojevima* koji je škola nabavila.

Tužno, naš postojeći sustav matematičkog obrazovanja točno je takva noćna mora. Zapravo, kad bih morao stvoriti mehanizam za strelovito **uništavanje** dječje urođene radoznalosti i ljubavi prema stvaranju uzoraka, nikako ne bih mogao napraviti bolji posao od ovog koji je već napravljen – jednostavno ne bih imao dovoljno mašte da dođem do tako besmislenih i bezdušnih ideja koje tvore današnje matematičko obrazovanje.

Svi znaju da nešto ne valja. Političari kažu: “Trebamo više standarde”. Škole kažu: “Trebamo više novaca i opreme”. Pedagozi kažu jedno, nastavnici drugo. Svi su oni u krivu. Jedini koji razumiju što se događa su oni koje se najčešće optužuje, a najrijeđe sluša: učenici. Oni kažu: “matematika je glupa i dosadna” i u pravu su.

Matematika i društvo

Prvo što treba shvatiti jest da je matematika umjetnost. Razlika između matematike i ostalih umjetnosti, poput glazbe i slikanja, leži u tome što je naše društvo ne prepoznaje kao takvu. Svi shvaćaju da pjesnici, slikari i glazbenici stvaraju umjetnička djela, izražavaju se riječima, slikom i zvukom. Naše društvo je zapravo prilično velikodušno kad je riječ o kreativnom izražavanju – umjetnicima se smatraju arhitekti, kuhari, pa čak i televizijski redatelji. Pa zašto ne i matematičari?

Dio problema je taj što nitko nema blagog pojma što matematičar radi. Uobičajeno shvaćanje je, čini se, da matematičari imaju nekakve veze sa znanostima – možda oni svojim formulama pomažu znanstvenicima ili iz nekog razloga hrane računala velikim brojevima ili slično. Kad bi svijet trebalo podijeliti na “pjesničke sanjare” i “racionalne mislioce”, bez sumnje bi većina ljudi matematičare strpala u posljednju kategoriju.

Međutim, činjenica je da ništa nije tako sanjarsko niti pjesnički, ništa nije tako radikalno, rušilačko niti psihodelično kao matematika. Potpuno je jednako zahtjevna za um kao kozmologija ili fizika (matematičari su **začeli** crne rupe daleko prije nego što su ih astronomi otkrili) i daje više slobode u izražavanju od pjesništva, slikanja ili glazbe (što uvelike ovisi o svojstvima fizikalnog svemira). Matematika je najčišća umjetnost, ali isto tako i najnešvaćenija.

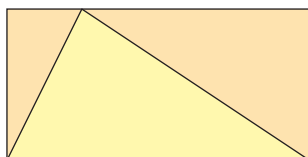
Pa, dozvolite mi da objasnim što je matematika i što matematičari rade. Teško da mogu započeti bolje nego izvrsnim opisom G. H. Hardyja:

Matematičar je, poput slikara ili pjesnika, tvorac uzoraka. Ako su njegovi uzorci postojaniji od njihovih, to je stoga što su načinjeni od ideja.

Dakle, matematičari sjede naokolo, stvarajući uzorke ideja. Kakve vrste uzoraka? Kakve vrste ideja? Ideje o nosorozima? Ne, takve prepuštamo biologima. Ideje o

jeziku i kulturi? Ne, obično ne. Te su stvari daleko prezamršene za matematički ukus. Postoji li nešto poput sveobuhvatnog estetskog načela u matematici, onda je to načelo: **jednostavno je lijepo**. Matematičari uživaju razmišljajući o najjednostavnijim mogućim stvarima, a najjednostavnije stvari su **imaginarne**.

Na primjer, ako želim razmišljati o oblicima – a često želim – mogu zamisliti trokut u pravokutnom okviru:



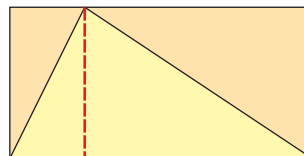
Pitam se koliko pravokutnika taj trokut zauzima. Možda dvije trećine? Važno je shvatiti da ne govorim o **crtežu** trokuta u pravokutniku. Niti govorim o nekom metalnom trokutu koji je dio nosača mosta. Nema ovdje neke skrivene praktične svrhe. Samo se **igram**. To je matematika – razmišljanje, igranje, zabavljanje vlastitom maštom. Kao prvo, pitanje koliko pravokutnika zauzima trokut nema nikakvog **smisla** za stvarne, fizičke predmete. Čak i najpreciznije načinjen fizički trokut ipak je beznadno zamršen skup zujećih atoma; mijenja veličinu iz minute u minutu. To jest, osim ako ne želite govoriti o nekoj vrsti **približnih** mjerenja. Takvo pitanje nije jednostavno, zapravo je prilično gadno jer ovisi o nizu detalja iz stvarnog svijeta. Ostavimo to znanstvenicima. **Matematičko** pitanje odnosi se na zamišljeni trokut u zamišljenom pravokutniku. E, tu nastupa ljepota. Bridovi su savršeni jer želim da budu takvi – više volim razmišljati o takvoj vrsti predmeta. To je glavna tema u matematici: stvari su onakve kakve želite da budu. Imate bezbroj mogućnosti, nema stvarnosti koja bi vam smetala.

S druge strane, kad jednom izaberete (mogu izabrati, primjerice, da moj trokut bude simetričan ili ne), tada vaše kreacije čine što čine, htjeli vi to ili ne. To je zadržljiva stvar kod zamišljenih stvari: one vam odgovaraju! Trokut zauzima određeni dio pravokutnika i ja nemam nikakvu kontrolu nad time koliki je taj dio. Negdje postoji broj, možda je on $\frac{2}{3}$, možda nije, ali ja ne mogu reći koliki je on. Moram **otkriti** koliki je.

Dakle, uspijevamo se igrati i razmišljati što god želimo i stvarati uzorke i postavljati pitanja o njima. Ali, kako odgovaramo na ta pitanja? To uopće nije kao u fizici. Ne postoje eksperimenti koje mogu provesti s pokusnim cijevima i opremom, ili čime god, koji će mi reći istinu o plodu moje mašte. Jedini način da se dođe do istine o našim zamislima jest da koristimo našu moć zamišljanja, a to je težak posao.

U slučaju trokuta u pravokutniku, zaista vidim nešto jednostavno i lijepo:

razrežem li pravokutnik na dva dijela, ovako:



vidim da stranice trokuta svaki taj dio dijagonalno dijele na pola. Dakle, površina unutar trokuta jednaka je površini izvan trokuta. To znači da trokut zauzima točno pola pravokutnika!

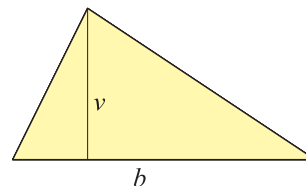
Evo, tako djelić matematike izgleda i tako se osjeća. Ta mala priča je primjer matematičke umjetnosti: postavljane jednostavnih i elegantnih pitanja o zamišljenim tvorevinama i umijeće davanja zadovoljavajućih i predivnih objašnjenja. Ne postoji ništa slično tome carstvu čistih ideja; ono je očaravajuće, ono je zabavno i ono je besplatno!

Otkud mi ta ideja? Kako sam znao da treba nacrtati tu crtu? Kako slikar zna kamo treba spustiti svoj kist? Nadahnuće, iskustvo, pokušaji i pogreške, glupa sreća. U tome je umjetnost – u stvaranju lijepih malih pjesmica misli, soneta čistog razuma. U toj umjetnosti leži nešto predivno promjenjivo. Odnos između trokuta i pravokutnika bio je tajna, a onda ju je ta mala crta učinila očiglednom. Nisam mogao vidjeti, a onda odjednom vidim. Nekako sam ni iz čega uspio stvoriti potpunu, jednostavnu ljepotu i u tom procesu se promijeniti. Nije li to umjetnost?

Zato je tako žalosno vidjeti što se u školi radi od matematike. Ta bogata i zadržljiva avantura mašte svedena je na sterilni niz činjenica koje treba zapamtiti i postupaka koje treba slijediti. Umjesto jednostavnog i prirodnog pitanja o oblicima te kreativnog i nagrađujućeg procesa razmišljanja i otkrivanja, učenici se tretiraju na sljedeći način:

formula za površinu trokuta:

$$P = \frac{1}{2} bv$$



Površina trokuta jednaka je polovici osnovice pomnoženoj visinom. Od učenika se traži da zapamte ovu formulu, a zatim da je svaki put iznova primjenjuju u "vježbama". Nestao je izazov, zadovoljstvo, pa čak i napor i frustracija kreativnog čina. Više ni **problem** ne postoji. Pitanje je postavljeno i na njega je istovremeno odgovoreno – učenicima ništa nije preostalo.

Dopustite mi da razjasnim čemu prigovaram. Ne radi se o formulama, niti pamćenju zanimljivih činjenica. To je dobro u kontekstu i ima svoje mjesto kao što ga

ima učenje riječi – pomaže pri kreiranju vrijednijeg, finijeg umjetničkog djela. Nije važna činjenica da trokut zauzima polovinu pravokutnika. Važna je prekrasna ideja koja vodi do te činjenice i to kako ona može nadahnuti ostale prekrasne ideje i dovesti do kreativnih rješenja nekih drugih problema – nešto što vam gola tvrdnja ili činjenica ne mogu pružiti.

Eliminacijom kreativnog procesa i zadržavanjem samo rezultata tog procesa, vi u stvari jamčite da se tim predmetom nitko neće baviti na pravi način. To je kao kad mi **kažete** da je Michelangelo načinio prekrasnu skulpturu, a ne date mi da je **vidim**. Kako ću time biti nadahnut? (I naravno, u stvari je još puno gore od tog – barem se podrazumijeva da **postoji** umjetničko djelo kojem sam spriječen diviti se.)

Koncentriranjem na **što**, izostavljajući **zašto**, matematika je svedena na praznu ljusku. Umjetnost nije u "istini" već u objašnjenju i razlozima. Razlog je taj koji daje istinitost sadržaju i određuje što je zaista rečeno i što se mislilo. Matematika je **umjetnost obrazlaganja**. Uskrate li učenicima sudjelovanje u toj aktivnosti – u postavljanju vlastitih problema, donošenju vlastitih zaključaka i otkrića, u tome da budu u krivu, da budu kreativno frustrirani, da dobiju inspiraciju i da "skrpaju" svoja vlastita objašnjenja i dokaze – uskraćujete im samu matematiku. I stoga ne – ne žalim se ja na prisutnost činjenica i formula na satovima matematike, žalim se na nedostatak **matematike** na našim satovima matematike.

Kad bi vam vaš učitelj likovne umjetnosti rekao da je slikanje samo ispunjavanje numeriranih područja bojama, znali biste da nešto nije u redu. Društvo vas informira – postoje muzeji i galerije, a postoji i umjetnost u vašem vlastitom domu. Slikanje je u društvu dobro shvaćeno kao sredstvo ljudskog izražavanja. Isto tako, kad bi vas učiteljica fizike pokušavala uvjeriti da se astronomija bavi predviđanjem budućnosti na temelju datuma rođenja, znali biste da je luda – znanost se uvukla u društvo do te mjere da skoro svi znaju za atome i galaksije i za fizikalne zakone. No, ostavi li vaš učitelj matematike dojam, namjerno ili propustom, da su to samo formule, definicije i pamćenje postupaka, tko će vas uputiti na pravi put?

Taj kulturni problem je "neprekidno-samoobnavljajuće" čudovište: učenici uče o matematici od svojih učitelja, pa se nedostatak razumijevanja i poštovanja prema matematici u našem društvu ponavlja unedogled. Još gore, neprestano odvijanje te "pseudomatematike", to naglašavanje preciznog ali besmislenog baratanja simbolima, stvara svoju vlastitu kulturu i svoj vlastiti skup vrijednosti. Oni koji su se tome uspjeli prilagoditi iz tog svog uspjeha izvlače prilično samopoštovanja. Mnogi učenici bivaju ožalošćeni kad na kraju školovanja otkriju, nakon što su im desetljećima govorili da su dobri u matematici, da u stvari nemaju stvarne nadarenosti za matematiku i zapravo su samo izvrsni u slijeđenju pravi-

la. Matematika nije slijeđenje postojećih pravila, ona je smišljanje novih.

A nisam čak niti spomenuo nedostatak matematičke kritičnosti u školi. Učenicima ni u jednom trenutku nije otkrivena tajna da su matematiku, poput bilo koje druge literature, stvorila ljudska bića sebi za zabavu, da su matematička djela podvrgnuta kritičkoj procjeni, da čovjek može imati i razviti matematički **ukus**. Matematičko djelo je poput pjesme, i možemo se pitati zadovoljava li ono naš estetski kriterij: je li ovaj dokaz bez greške, ima li on smisla, je li jednostavan i elegantan, dovodi li me bliže samom srcu problema? Naravno, u školi nema kritičnosti – nije stvorena umjetnost kritiziranja!

Zašto ne želimo da naša djeca nauče matematiku? Je li to zato što im ne vjerujemo, ili mislimo da je to preteško? Izgleda da mislimo kako su sposobna raspravljati i donositi svoje zaključke o Napoleonu, zašto ne o trokutima? Mislim da je to jednostavno zato što mi kao društvo ne znamo što je matematika. Dojam koji smo dobili o tome jest da se radi o nečem jako hladnom i strogo tehničkom, što nitko ne bi mogao shvatiti – samoispunjavajuće predskazanje ako je ono ikad postojalo. Bilo bi dovoljno loše kad bi društvo bilo samo neuko u matematici, ali to što ljudi misle da **znaju** što je matematika, to je još gore, jer su očito u ogromnoj zabludi da je matematika na neki način korisna društvu! Već to je ogromna razlika između matematike i ostalih umjetnosti. Društvo matematiku vidi kao neku vrstu alata za znanost i tehnologiju. Svi znaju da su poezija i glazba namijenjene čistom uživanju te podizanju i oplemenjivanju ljudskog duha (odatle proizlazi njihovo prividno izbacivanje iz kurikuluma javnih škola), ali ne i matematika – matematika je **važna**.

SIMPLICIO: Pokušavate li vi to reći da matematika društvu ne nudi nikakvu korisnu niti praktičnu primjenu?

SALVIATI: Naravno da ne. Samo podsjećam da to što nešto slučajno ima praktične posljedice ne znači da je to ono o čemu je riječ. Glazba može vojsku odvesti u borbu, ali to nije razlog da ljudi pišu simfonije. Michelangelo je ukrasio strop, ali siguran sam da je na umu imao nešto puno uzvišenije.

SIMPLICIO: Pa, zar ljudi ne trebaju učiti te korisne posljedice matematike? Zar ne trebamo računovođe i stolare i slično?

SALVIATI: Koliko ljudi stvarno koristi išta od te "praktične matematike" koju su navodno naučili u školi? Misliš li da stolari rade naokolo rabeći trigonometriju? Koliko odraslih pamti kako se dijele razlomci ili rješava kvadratna jednadžba? Očigledno postojeći program praktične obuke ne funkcionira, i to iz dobrog razloga: bolno je dosadan i nitko ga ionako ne koristi. Pa, zašto onda ljudi misle da je toliko važan? Ne vidim kakve kori-

sti ima društvo od toga da mu članovi hodaju naokolo s mutnim sjećanjem na algebarske formule i geometrijske crteže, ali s jasnim sjećanjem na to da su ih mrzili. Međutim, moglo bi biti nekog dobra u tome kad bi se ljudima pokazalo nešto lijepo i kad bi im se dala mogućnost da uživaju biti kreativni i fleksibilni mislioci otvorenog uma – ono što bi pravo matematičko obrazovanje moglo pružiti.

SIMPLICIO: Ali ljudi trebaju biti sposobni srediti stanje na svojoj čekovnoj knjižici, zar ne?

SALVIATI: Siguran sam da većina ljudi koristi džepno računalo za svakodnevno računanje. A zašto i ne bi? Svakako je lakše i pouzdanije. No, nije mi cilj samo reći kako je sadašnji sustav užasno loš, već to da je ono što mu nedostaje tako izvanredno dobro! Matematiku bi trebalo poučavati kao umjetnost radi same umjetnosti. Ova zemaljski "korisna" gledišta prirodno bi slijedila kao trivijalni nusprodukt. Beethoven je lako mogao napisati reklamni spot, ali je njegova motivacija za učenjem glazbe bila da stvori nešto prekrasno.

SALVIATI: Ali nisu svi stvoreni da budu umjetnici. Što je s djecom koja nisu "matematički ljudi"? Kako bi se oni uklopili u tvoj nacrt?

SIMPLICIO: Kad bi svi bili izloženi matematičari na prirodan način, sa svim zabavnim izazovima i iznenađenjima koje ona nameće, mislim da bismo vidjeli dramatičan preokret i u stavu učenika prema matematičari i u našem shvaćanju toga što znači "biti dobar u matematičari". Gubimo toliko potencijalno nadarenih matematičara – kreativnih, inteligentnih ljudi koji s pravom odbijaju to što se čini kao besmislen i sterilan predmet. Jednostavno su prepametni da bi trošili svoje vrijeme na takvu glupost.

SALVIATI: Ali, ne mislite li da, kad bi sati matematike bili više poput sati likovne umjetnosti, mnoga djeca ne bi ništa naučila?

SIMPLICIO: Ni sada ništa ne uče! Bolje ne imati nastavu matematike uopće, nego činiti to što se trenutno radi. Tada bi barem neki ljudi sami imali šanse otkriti nešto lijepo.

SALVIATI: Dakle, izbacili biste matematiku iz školskog kurikulumu?

SIMPLICIO: Matematika je već izbačena! Samo je pitanje što napraviti s dosadnom šupljom ljuskom koja je ostala. Naravno, ja bih je radije zamijenio aktivnim i veselim bavljenjem matematičkim idejama.

SALVIATI: Ali, koliko nastavnika matematike zna dovoljno o svom predmetu da bi ga poučavali na taj način?

SIMPLICIO: Vrlo malo. A to je samo vrh ledenog brijega....

Matematika u školi

Sigurno nema boljeg načina ubijanja oduševljenja i zanimanja za predmet nego učiniti ga obaveznim u školskom kurikulumu. Uključite ga kao glavnu komponentu standardiziranog ispitivanja i stvarno jamčite da će obrazovni sustav iz njega isisati sav život. Školski odbori ne razumiju što je matematika kao ni pedagozi, niti autori udžbenika, niti izdavačke kuće, a nažalost niti većina učitelja matematike. Opseg problema je velik, skoro ne znam odakle početi.

Započnimo s propašću "reforme matematike". Dugi niz godina rasla je svjesnost o tome da je "nešto trulo u državi matematičkog obrazovanja". Provedene su studije, organizirane su konferencije i osnovani brojni odbori nastavnika, izdavača i pedagoga (što god oni bili) kako bi "riješili problem". Bez obzira na osobni interes koji zahvaljujući reformama ima izdavačka djelatnost (koja profitira svake minute političkim promjenama nudeći "nova" izdanja svojih nečitljivih nakaznosti), cijeli reformski pokret je propao. Matematički kurikulum ne treba reformirati, treba ga **izbaciti iz uporabe**.

Sva ta galama i razmetanje o tome koje teme treba poučavati i kojim redom, ili koristiti ove ili one oznake, ili koju vrstu i model **kalkukatora**, za Boga miloga – to je kao preslagivati stolce na palubi Titanica! Matematika je **muzika razuma**. Baviti se matematikom znači sudjelovati u otkrivanju i zaključivanju, imati intuiciju i nadahnuće, biti zbunjen – ne zato što vam to nema smisla, već zato što ste tome vi dali smisao, ali još ne razumijete kamo smjera vaša kreacija; biti iznerviran poput umjetnika, biti pun strahopoštovanja i biti preplavljen skoro bolnom ljepotom; biti **živ**, dovraga! Izbacite to iz matematike i možete imati konferencija koliko god želite, ali neće biti važno. Operirajte koliko god želite, doktori, **vaš pacijent je već mrtav!**

Najžalosnija strana te "reforme" su pokušaji da se "matematiku učini zanimljivom" i "važnom dječjim životima". Matematiku nije potrebno **učiniti** zanimljivom – ona je već zanimljiva više nego što mi možemo podnijeti! A njezina veličina leži u njezinoj potpunoj **nevažnosti** za naše živote. Zato je toliko zabavna!

Pokušaji da se matematiku predstavi važnom u svakodnevnom životu neizbježno izgledaju usiljeni i proračunati: "Vidite djeco, znate li računati, možete otkriti koliko je stara Marija, ako znamo da je dvije godine starija od svoje dvostruke starosti prije sedam godina!" (Kao da bi itko ikada imao taj smiješni podatak umjesto njezinih godina.) Algebra nije o svakodnevnom životu, ona je o brojevima i simetriji – i to je ispravno tumačenje iz nje i o njoj:

Pretpostavite da imam zbroj i razliku dvaju brojeva. Kako mogu otkriti koji su to brojevi?

To je jednostavno i elegantno pitanje, i ne treba ga silom učiniti privlačnijim. Stari Babilonci uživali su u takvim zadacima, a uživaju i naši učenici. (A ja se nadam da ćete i vi uživati!) Nije potrebno izvoditi vratolomije da bi se matematici pridala važnost. Ona je važna poput bilo koje umjetnosti, ona je važno ljudsko iskustvo.

U svakom slučaju, zar vi stvarno mislite da djeca žele nešto što je važno za njihov svakodnevni život? Mislite li da će ih uzbuditi nešto praktično poput složenog kamatnog računara? Ljudi uživaju u maštanju, a upravo to je ono što matematika pruža – odmor od svakodnevnog života, lijek od stvarnog radnog dana.

Sličan problem događa se kad učitelj ili udžbenici podlegnu "slatkoći". To je ono kad se, u želji da se obračuna s tzv. "strahom od matematike" (jednim od simptoma cjelokupne bolesti uzrokovane školstvom) matematika prikazuje "prijateljskom". Kako biste svojim učenicima pomogli da, na primjer, zapamte formulu za površinu i opseg kruga, vi izmislite čitavu priču o "gospodinu O " koji se vozi oko "gospođe P " i priča joj kako su ukusne njegove "dvije pite" ($O=2\pi r$), a kako su njezine "pite kvadratnog oblika" ($P=\pi r^2$), ili neku sličnu besmislicu. A što je s pravom pričom, onom o ljudskoj borbi s problemom mjerenja krivulja; o Eudoxu i Arhimedu i metodi iscrpljivanja; o transcendentnosti broja π ? Što je zanimljivije – mjeriti neprecizne dimenzije kruga nacrtanog na milimetarskom papiru, koristiti bez objašnjenja dane formule (koje treba zapamtiti i primjenjivati unedogled) ili čuti priču o jednom od najljepših, čarobnih problema i o jednoj od najblistavijih i najsnažnijih ideja u povijesti čovječanstva? Mi u ljudima ubijamo svako zanimanje za krugove, za Boga miloga!

Zašto ne pružimo učenicima šansu da barem čuju o tim stvarima, pustimo sad na stranu pružanje mogućnosti da se zapravo bave matematikom, tj. da dođu do svojih vlastitih ideja, stavova i reakcija? Koji drugi predmet se poučava rutinski, bez spominjanja povijesti, filozofije i tematskog razvoja, bez mjerila ljepote i bez opisa trenutnog stanja? Koji drugi predmet izbjegava svoja glavna izvorišta – predivne umjetničke radove nekih od najkreativnijih umova u povijesti – u korist trećerazrednim udžbeničkim ruglima?

Glavni problem sa školskom matematikom jest da **ne-ma problema**. O, znam ja što se smatra problemom na satima matematike, to su te nezanimljive "vježbe". "Evo zadataka određenog tipa. Evo kako ćete ih riješiti. Da, bit će u testu. Za zadaću izradite sve neparne zadatke od 1 do 35." Koji žalostan način učenja matematike: biti dresirana čimpanza.

Ali zadatak, originalno, do Boga iskreno prirodno ljudsko **pitanje** – to je druga stvar. Kolika je dijagonala kocke? Ima li beskonačno mnogo prostih brojeva? Je li "beskonačno" broj? Na koliko načina mogu simetrično popločiti neku površinu? Povijest matematike je povijest

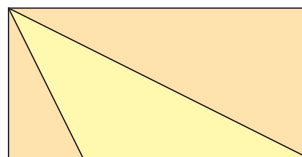
ljudskog bavljenja pitanjima poput ovih, a ne besmisleno *povraćanje* formula i postupaka (zajedno sa zadacima izmišljenim samo da bi ih se koristilo).

Dobar zadatak je onaj za koji ne znate **kako** ga riješiti. To ga čini dobrom zagonetkom i dobrom prilikom. Dobar zadatak ne sjedi izoliran sam za sebe, već služi kao odskočna daska prema **ostalim** zanimljivim pitanjima. Trokut zauzima polovinu pravokutnika. A što je s piramidom unutar kutije? Možemo li taj problem riješiti na sličan način?

Mogu shvatiti ideju da se učenici istreniraju u savladavanju određenih tehnika – i ja to činim. Ali ne samo to. Tehnike, ako u bilo kojoj umjetnosti, onda pogotovo u matematici moraju biti učene u kontekstu. Veliki problemi, njihova povijest, kreativni proces – to je ispravno postavljanje. Dajte učenicima dobar zadatak, neka se naprežu i živciraju. Pogledajte do čega su došli. Pričekajte dok ne počnu umirati za idejom, **onda** im tek pokažite neke tehnike. Ali ne previše.

Stoga, odložite svoje planove i programe i svoje grafskope, svoje šarene udžbeničke odvratnosti, svoje CD ROM-ove i sve ostalo iz te putujuće cirkuske predstave s nakazama od suvremenog obrazovanja i jednostavno radite matematiku sa svojim učenicima! Učitelji likovne umjetnosti ne gube vrijeme s udžbenicima, a posebne tehnike slikanja ne uče napamet. Čine ono što je prirodno za njihov predmet – daju djeci da slikaju. Obilaze od štafelaja do štafelaja sugerirajući i nudeći smjernice:

"Razmišljao sam o našem zadatku s trokutom i primijetio sam nešto. Ako je trokut tupokutan, tada **ne zauzima** polovinu pravokutnika! Gle, vidi:



"Odlično zapažanje! Naš postupak rezanja pretpostavlja da vrh trokuta leži ravno iznad osnovice. Sad nam treba nova ideja."

"Da ga pokušam razrezati na drukčiji način?"

"Naravno. Isprobaj sve moguće ideje. I reci mi što si otkrio!"

Dakle, kako učimo svoje učenike da se bave matematikom? Birajući privlačne i prirodne zadatke koji odgovaraju njihovom ukusu, osobnosti i razini iskustva. Dajući im vremena da otkrivaju i oblikuju zaključke. Pomažući im da iznesu svoje argumente i stvarajući atmosferu zdrave i vitalne matematičke kritičnosti. Tako da bude-mo fleksibilni i spremni za iznenadne promjene smjerala kojima nas vodi njihova radoznalost. Ukratko, tako da imamo pošten intelektualni odnos s našim učenicima i našim predmetom.

Naravno, to što predlažem je nemoguće iz više razloga. Čak i da zanemarimo činjenicu da državni kurikulum i standardni testovi zaista ukidaju autonomiju učitelja, nekako sumnjam da većina učitelja uopće **želi** imati takav snažan odnos sa svojim učenicima. To traži previše ranjivosti i previše odgovornosti – ukratko, to je previše posla!

Puno je lakše biti pasivni vodič kroz "materijal" nekog izdavača i slijediti upute s poledine boce šampona: "održite predavanje, vježbajte, ponovite", nego duboko i misaono razmišljati o značenju nečijeg predmeta i kako to značenje prenijeti direktno i pošteno nečijem učeniku. Potiče nas se da se suzdržimo od teškog zadatka donošenja odluka koje se temelje na mudrosti i savjesti svakog pojedinca, te da "pratimo program". Ide se jednostavno linijom manjeg otpora:

izdavači udžbenika – učitelji odnose se kao i:

- A) farmaceutske tvrtke – liječnici;
- B) diskografske kuće – diskdžokeji;
- C) korporacije – političari;
- D) sve već navedeno.

Problem je u tome što je matematika, poput slikanja ili poezije, **težak kreativni rad**. To je čini teškom za poučavanje. Matematika je spor, mislilački proces. Treba vremena da bi se stvorilo umjetničko djelo, i potreban je vješt učitelj koji će ga prepoznati. Naravno, lakše je postaviti niz pravila nego voditi nadahnutog mladog umjetnika, i lakše je napisati upute o rukovanju videorekorderom nego napisati knjigu sa stavom.

Matematika je **umjetnost**, a umjetnost bi trebali poučavati umjetnici koji se njome bave, ili barem ljudi koji cijene tu umjetničku formu i mogu je prepoznati kad je vide. Nije potrebno da glazbenu umjetnost učite od profesionalnog kompozitora, ali biste li željeli da vas, ili vaše dijete, poučava netko tko čak ne svira nijedan instrument ili tko nikad u životu nije poslušao neko muzičko djelo? Biste li prihvatili za učitelja likovne umjetnosti nekog tko nikad u ruke nije uzeo olovku ili tko nikad nije stupio u muzej? Zašto onda prihvaćamo učitelje matematike koji nikad nisu stvorili neko originalno matematičko djelo, koji ništa ne znaju o povijesti i filozofiji predmeta, ništa o novijem razvoju, u stvari ništa više od onog što se od njih očekuje da prenesu svojim nesretnim učenicima? Kakav je to učitelj? Kako netko može poučavati nešto s čime se sam nikada ne bavi? Ja ne znam plesati pa mi niti ne pada na pamet da poučavam ples (mogu pokušati, no to ne bi baš bilo lijepo). Razlika je u tome što ja **znam** da ne znam plesati. Nemam nikoga tko bi mi rekao da sam dobar u plesanju samo zato jer znam hrpu plesnih izraza.

Ne tvrdim da učitelji matematike moraju biti profesionalni matematičari – daleko od toga. No, ne bi li oni trebali barem razumjeti što je matematika, biti izvrsni u tome i uživati radeći to?

Ako se poučavanje svede samo na prijenos podataka, ako nema dijeljenja uzbuđenja i iznenađenja, ako su učitelji sami pasivni primatelji informacija, a ne tvorci novih ideja, kakvu nadu imaju njihovi učenici? Ako je zbrinjavanje razlomaka učitelju proizvoljan skup pravila, a ne ishod kreativnog procesa niti rezultat istančanog izbora i želja, tada će se tako činiti i jednom učeniku.

Poučavanje nije u podacima. Poučavati znači imati iskren intelektualni odnos sa svojim učenicima. Poučavanje ne zahtijeva metode, alate niti vježbanje. Samo sposobnost da se bude pravi. Ako ne možete biti pravi, tada se nemate prava nametati nevinoj djeci.

Konkretno, **poučavanje ne možete naučiti**. Učiteljske škole su potpuni promašaj. Oh, možete vi slušati nastavu o razvoju u ranom djetinjstvu i što sve ne, i možete naučiti "učinkovito" rabiti ploču i načiniti "pripremu" (koja, usput budi rečeno, osigurava da je vaš sat **isplaniran**, pa stoga pogrešan), ali nikada nećete biti pravi učitelj ako niste voljni biti prava osoba. Poučavanje znači otvorenost i poštenje, sposobnost da se podijeli uzbuđenje, te ljubav prema učenju. Bez toga, svi stupnjevi obrazovanja na svijetu neće vam pomoći, a s njima su oni potpuno nepotrebni.

To je sasvim jednostavno. Učenici nisu svemirci. Oni reagiraju na ljepotu uzoraka, i prirodno su radoznali kao i bilo tko drugi. Samo porazgovarajte s njima! I što je još važnije, slušajte ih!

SIMPLICIO: U redu, razumijem da u matematici ima umjetnosti i da, izlažući ljude matematici, ne radimo dobar posao. No, nije li prilično ezoterično i preuzvišeno to očekivati od našeg obrazovnog sustava? Ne pokušavamo stvoriti filozofe, samo želimo da ljudi nauče osnovna pravila računanja tako da mogu funkcionirati u društvu.

SALVIATI: Ali, to nije istina! Školska matematika bavi se mnogim stvarima koje nemaju nikakve veze sa sposobnošću uklapanja u društvo – algebra i trigonometrija na primjer. Ta učenja su sasvim nebitna za svakodnevni život. Jednostavno predlažem da, ako ćemo ih uključiti u osnovno obrazovanje većine učenika, to učinimo na životan i prirodan način. Također, kao što sam već rekao, samo zato što predmet ima neke praktične koristi za svijet, ne znači da tu korisnost trebamo staviti u središte svog poučavanja i učenja. Istina je da morate znati čitati kako biste popunili formulare na šalteru, ali ne učimo zato djecu da čitaju. Učimo ih čitanju iz viših razloga – da im omogućimo pristup predivnim i značajnim idejama. Ne samo da bi bilo okrutno poučavati čitanje na takav način – siliti trećaše da ispunjavaju narudžbenice i porezne obrasce – to ne bi funkcioniralo! Učimo stvari zato jer nas zanimaju, ne zato jer bi nam bile kasnije korisne. A za matematiku upravo to tražimo od učenika.

SIMPLICIO: Pa, ne trebaju li trećaši znati računati?

SALVIATI: Zašto? Želite li ih naučiti da zbroje 427 i 389? To nije pitanje koje bi postavila većina osmogodišnjaka. Zapravo niti većina **odraslih** ne razumije sasvim ra-

čunanje s dekadskim mjesnim vrijednostima, očekujete li vi da to bude jasno trećašićima? Ili vas uopće nije briga razumiju li? Takva vrsta tehnike se jednostavno prerano poučava. Naravno, to se može izvesti, ali mislim da to općenito više šteti nego koristi. Bilo bi mnogo bolje pričekati da proradi njihova urođena radoznalost o brojevima.

SIMPLICIO: Pa što bismo onda trebali raditi s malom djecom na nastavi matematike?

SALVIATI: Igrati igrice! Naučiti ih šah i go, *hex* i *backgammon*, pauka i *nim* ili što god. Izmisлити igru. Rješavati zagonetke. Dovedi ih u situaciju u kojoj je potrebno deduktivno zaključivati. Ne brinite za simbole i tehniku, pomozite im da postanu aktivni i kreativni matematički mislioci.

SIMPLICIO: Čini mi se da bismo užasno puno riskirali. Što ako smanjimo računanje toliko da naši učenici na kraju neće znati zbrajati ili oduzimati?

SALVIATI: Mislim da je daleko veći rizik stvaranja škola lišenih kreativnosti bilo koje vrste, u kojima je jedina zadaća učenika zapamtiti datume, formule i cijeli niz riječi te ih onda automatski reproducirati na standardnim testovima – "Osposobimo sutrašnju radnu snagu danas!"

SIMPLICIO: Ali, sigurno postoje neke osnovne matematičke činjenice s kojima bi jedna obrazovana osoba trebala biti upoznata.

SALVIATI: Da, a najvažnija od njih je činjenica da je matematika umjetnička forma koju su ljudi stvorili za uživanje! U redu, da, bilo bi lijepo kad bi ljudi znali osnove primjerice o brojevima i oblicima. Ali to nikad neće biti rezultat učenja napamet, "driljanja", predavanja i vježbanja. Stvari učite baveći se njima i pamtite ono što vam je važno. Milijuni odraslih u nedoumici pamti "minus b plus ili minus korijen iz b na kvadrat minus $4ac$, sve kroz $2a$ ", apsolutno nemajući pojma što to znači. Razlog tome je što im nikad nije pružena prilika da sami otkriju ili izmisle takve stvari. Nikad nisu dobili zanimljiv problem, o kojem su morali razmišljati, zbog kojega su se uzrujali, i zbog kojega su poželjeli stvoriti tehniku ili metodu rješavanja. Nikad im nije ispričana povijest o povezanosti ljudskog roda s brojevima – o problemu na pločici starih Babilonaca, o Rhindovom papirusu, o *Liber Abaci*, niti o *Ars Magna*. A što je još važnije, nije im pružena prilika čak niti da se zainteresiraju za neko pitanje; odgovoreno im je prije nego što su ga mogli postaviti.

SIMPLICIO: Ali, ne možemo mi čekati da svaki učenik otkriva svoju matematiku! Prošla su stoljeća dok ljudi nisu otkrili Pitagorin teorem. Zar to očekujete od prosječnog djeteta?

SALVIATI: Ne očekujem. Budimo jasni s tim. Žalim se na potpuno odsustvo umjetnosti i otkrivanja, povijesti i filozofije, ukupnog značenja i dalekovidnosti u matematič-

kom kurikulumu. To ne znači da tu nema mjesta za simbole, tehnike i razvijanje osnovnog znanja. Naravno da ima. Treba imati oboje. Prigovaram li da je klatno previše nagnuto na jednu stranu, to ne znači da ga želim nagnuti skroz na suprotnu stranu. No, činjenica je da ljudi uče bolje ako su do rezultata došli svojim radom. Poeziju ćete stvarno znati cijeniti jedino ako i sami pokušate napisati pjesmu, a ne učenjem napamet hrpe pjesmica.

SIMPLICIO: Da, ali da biste mogli napisati pjesmu, trebate znati abecedu. Proces učenja treba negdje započeti. Trebaš hodati da bi mogao trčati.

SALVIATI: Ne, moraš imati nešto **prema čemu** želiš trčati. Djeca mogu pisati pjesme i priče dok uče čitati i pisati. Komadić teksta je za šestogodišnjaka prekrasna stvar, a gramatičke i pravopisne pogreške ne čine mu ga manje lijepim. Čak i jako mala djeca mogu smisliti pjesmice, a pojma nemaju u kojem su tonalitету ili koju metriku koriste.

SIMPLICIO: Ali, nije li matematika drukčija? Nije li matematika jezik za sebe, sa svim tim oznakama koje najprije treba naučiti da bi ih se koristilo?

SALVIATI: Nije uopće. Matematika nije jezik, ona je avantura. Govore li glazbenici drugi jezik samo zato jer su odlučili zapisivati svoje ideje malim crnim točkicama? Ako govore, to nije nikakva prepreka jednogodišnjaku i njegovoj pjesmici. Da, tijekom stoljeća se razvila određena matematička stenografija, ali ona nikako nije nužna. Uglavnom se matematika izvodi s prijateljem nad šalicom kave, crtežom našvrblanim na salveti. Matematika jest i uvijek je bila u idejama, a važna ideja nadilazi oznake kojima je odlučite opisati. Kao što je Gauss jednom izjavio: "Trebamo **nazive**, a ne oznake".

SIMPLICIO: Ali, nije li jedan od ciljeva matematičkog obrazovanja pomoći učenicima da preciznije i logičnije razmišljaju i da razviju svoje "vještine brzog zaključivanja". Ne izoštravaju li sve te definicije i formule učenički um?

SALVIATI: Ne, ne izoštravaju. Ako išta drugo, onda baš trenutni sustav ima suprotni učinak zaglupljivanja uma. Oštrina uma bilo koje vrste rezultat je samostalnog rješavanja problema, a ne toga da nam se kaže kako ga riješiti.

SIMPLICIO: Istina. Ali što je s učenicima koji žele napraviti karijeru u znanosti ili žele biti inženjeri? Ne trebaju li oni obuku kakvu pruža tradicionalni kurikulum? Nije li to razlog što poučavamo matematiku u školama?

SALVIATI: Koliko će učenika koji uče o književnosti jednoga dana biti pisci? Ne poučavamo zato književnost, niti je učenici zato čitaju. Poučavamo da prosvjetlimo svakoga, a ne da istreniramo buduće profesionalce. Posljednja stvar koju itko treba jest da bude **treniran**.

Prevela: Sandra Gračan