

# Jednadžbe u razrednoj nastavi

Željko Brčić, Vinkovci



U programu matematike za osnovnu školu riječ "jednadžba" spominje se prvi put tek u šestom razredu, no gradivo prethodnih razreda isprepletano je zadacima koji u svojoj osnovi sadržavaju jednadžbe. Upoznavanje učenika s takvim sadržajima već u nižim razredima osnovne škole uvelike će smanjiti probleme koji se pojavljuju kasnije, pri uvođenju formalnih postupaka za rješavanje linearnih jednadžbi. Naravno, jednadžbe treba obraditi na način primjeren uzrastu učenika razredne nastave, a ne ih dodatno opterećivati novim i njima nerazumljivim sadržajima.

U članku je prikazana metoda rješavanja linearnih jednadžbi, koja se u pravilu koristi u rješenjima problemskih zadataka s matematičkih natjecanja učenika četvrtih i petih razreda osnovne škole. Neki zadaci koji se tamo pojavljuju mogu se rješavati računom jednadžbi, no prema programu učenici u to doba još i ne znaju što su jednadžbe. Metoda koju možemo nazvati "grafičkom metodom" ili "metodom crtanja" omogućuje učenicima učinkovito rješavanje takvih zadataka bez poznavanja jezika jednadžbi.

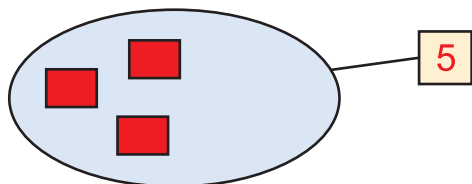
Članak će koristiti ponajprije učiteljima koji dodatnom nastavom pripremaju učenike za matematička natjecanja. Mnogi od njih još uvijek ustraju na uobičajenom načinu rješavanja jednadžbi. Od jed-

ne sam kolegice doslovce čuo da joj je lakše naučiti djecu rješavati linearne jednadžbe, nego im objašnjavati "kako zadatak s jednadžbama riješiti bez jednadžbi". Je li to stvarno lakše ili nije (i to za učenike, a ne za njihove mentore!), možete procijeniti sami u dijelu teksta u kojem su izložena oba načina rješavanja takvih zadataka.

## Redovita nastava

Učenici prvog razreda već u listopadu učeći zbrajanje i oduzimanje brojeva do 5 rješavaju svoju prvu linearnu jednadžbu.

**Primjer 1.** Dopuni da ih bude 5.



Nešto kasnije, ovakav zadatak iz grafičke forme prelazi u pravu jednadžbu. Treba, naime, u prazni kvadrat upisati neki broj tako da vrijedi:

$$3 + \square = 5$$

Očito je riječ o istom zadatku (jednadžbi) koji bi učenici viših razreda osnovne škole riješili ovako:

$$\begin{aligned} 3 + x &= 5 \\ x &= 5 - 3 \\ x &= 2. \end{aligned}$$

A što da radi učenik prvog razreda? Jedna je od mogućnosti problem prikazati crtežom. Otprilike ovako:

Imam 3 jabuke:



Koliko jabuka moram dodati (docrtati) da bi ih bilo 5?



Očito je da treba docrtati dvije jabuke pa je traženi nepoznati broj 2.

**Primjer 2.** U kvadratić upiši broj tako da oduzimanje bude točno.

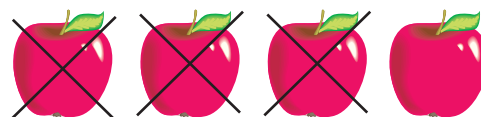
$$4 - \square = 1$$

U šestom razredu osnovne škole, nakon što učenici nauče negativne brojeve, jednadžba bi se rješavala ovako:

$$\begin{aligned} 4 - x &= 1 \\ -x &= 1 - 4 \\ -x &= -3 / : (-1) \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Kako da učenik prvog razreda riješi ovakav zadatak uz pomoć logičkog rasuđivanja primjerenog njegovu uzrastu?

Potrebno je nacrtati, primjerice, četiri jabuke i uz pomoć slike odrediti koliko jabuka treba pojesti (prekrižiti) da bi ostala samo jedna.



Treba pojesti 3 jabuke, odnosno u kvadratić treba upisati broj 3.

**Primjer 3.** Marko ima 7 godina, a sestra Ana je 3 godine mlađa od Marka. Marko, Ana i brat Ivan imaju zajedno 20 godina. Koliko godina ima Ivan?

**Rješenje u šestom razredu:**

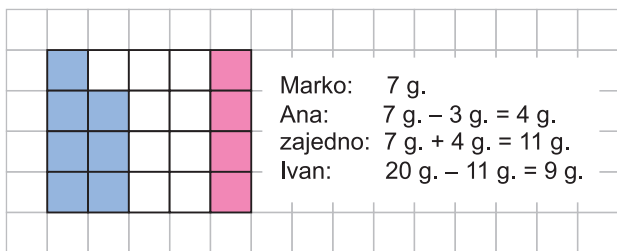
S  $x$  označimo Ivanove godine te postavimo i riješimo jednadžbu:

$$\begin{aligned} 7 + (7 - 3) + x &= 20 \\ 7 + 4 + x &= 20 \\ 11 + x &= 20 \\ x &= 20 - 11 \\ x &= 9. \end{aligned}$$

### Rješenje u prvom razredu:

U bilježnici izdvojimo 20 kvadratića (primjerice, nacrtamo pravokutnik  $5 \times 4$ ), pri čemu nam svaki kvadratić predstavlja jednu godinu. Marko ima 7 godina pa 7 kvadratića obojimo u jednu boju. Ana ima 3 godine manje, dakle 4, pa sljedeća 4 kvadratića obojimo u drugu boju. Neobojeni kvadratići predstavljaju Ivanove godine, a kako ih ima 9, dobili smo da Ivan ima 9 godina.

Učenike treba poticati da uz grafički prikaz (crtanje, bojenje i prebrojavanje kvadratića) rade i računski zapis sa što preglednijim sadržajem zadatka. Otprilike bi ovako trebalo izgledati rješenje u bilježnici:



Kad brojevi u zadacima postanu preveliki za brojenje i bojenje kvadratića, učenike treba priviknuti na simboličan zapis, kao u sljedećem primjeru.

**Primjer 4.** Luka je dobio novo računalo, monitor i pisač. Njegov je tata za to izdvojio 7546 kuna. Koliko je koštalo računalo ako pisač stoji 1089 kn, a monitor 1659 kn?

Ako s  $x$  označimo cijenu računala, vrijedi jednadžba:

$$x + 1659 + 1089 = 7546.$$

Ona se može riješiti koristeći osnovne postupke pri rješavanju jednadžbi:

$$x + 2748 = 7546$$

$$x = 7546 - 2748$$

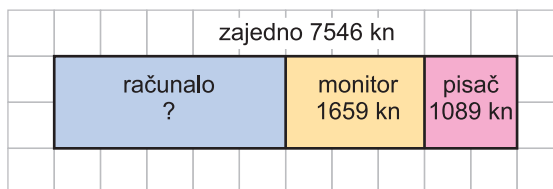
$$x = 4798.$$

Cijena računala je 4798 kuna.

Ovakav način zapisivanja očekuje se od učenika šestog razreda. Mlađi učenici zadatak rješavaju najčešće ovako:

$$\begin{array}{r} 1659 \\ + 1089 \\ \hline 2748 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7546 \\ - 2748 \\ \hline 4798 \end{array}$$

Dakle, oni zapravo rade isti račun, ali uz znatno reduciranje pisanja postupka. Od njih se očekuje da sami shvate što napraviti sa zadanim brojevima, koje računске operacije iskoristiti i kojim ih redom obaviti. Ako pritom imaju poteškoća, pomoći će im slikovni prikaz:



Gledajući sliku na kojoj veliki pravokutnik predstavlja cjelokupni iznos novca, pri čemu su poznata dva njegova dijela a treći nedostaje, učenici mogu lakše shvatiti zašto treba zbrajati 1089 i 1659, a zatim zbroj oduzeti od 7546.

## Dodatna nastava

Svi dosadašnji primjeri imali su samo jednu nepoznatu veličinu do koje se moglo doći računom jednadžbi ili bez njega. Prikazani crteži nisu bili nužni za dobivanje rezultata, odnosno vješti mali matematičari mogli su otkriti put za rješavanje problema i bez crtanja.

U primjerima koji slijede pojavljuju se dvije nepoznate ili više njih te grafički prikaz problema postaje nužan. Takvi zadaci nisu predviđeni za rad u redovitoj nastavi, ali se mogu raditi na dodatnoj nastavi.

Prije nego počnu rješavati teže zadatke kakvi se, primjerice, pojavljuju na matematičkim natjecanjima, učenici trebaju upoznati dva osnovna tipa takvih zadataka.

**Primjer 5.** Maja je dvostruko starija od svog brata Danijela. Koliko godina ima jedno, a koliko drugo dijete ako je zbroj njihovih godina 24?

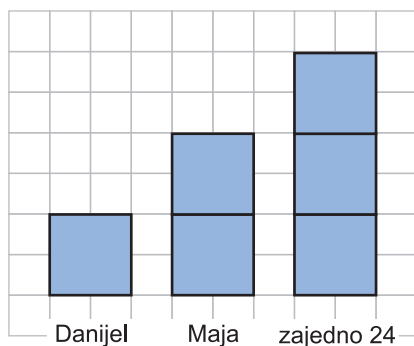
Učenici šestog razreda, koji su naučili postupke za rješavanje jednadžbi, zadatak bi riješili na ovaj način:

Ako Danijel ima  $x$  godina, onda dvostruko starija Maja ima  $2x$  godina. Zbroj njihovih godina je 24, pa vrijedi jednadžba:

$$\begin{aligned} x + 2x &= 24 \\ 3x &= 24 / : 3 \\ x &= 8. \end{aligned}$$

Dakle, Danijel ima 8 godina, a Maja  $2 \cdot 8 = 16$  godina.

Učenici koji ne znaju rješavati jednadžbe rješenje mogu dobiti dijeljenjem  $24 : 3 = 8$ . No, na prvi pogled nije jasno zašto broj 24 treba dijeliti baš s 3. Tu nam pomaže slika:



Danijelove godine predstavili smo kvadratom u kojem se nalazi neki broj koji ne znamo, a želimo ga otkriti. Maja je dvostruko starija pa njene godine predstavljaju dva ista takva kvadrata. Kada otkrijemo vrijednost jednog kvadrata, otkrili smo i Danijelove i Majine godine. Zbroj Danijelovih i Majinih godina prikazujemo trima jednakim kvadratima (jedan Danijelov i dva Majina). Vrijednost jednog kvadrata očito dobijemo dijeljenjem  $24 : 3 = 8$ . To je ujedno broj Danijelovih godina, dok Maja ima dvostruko više, dakle 16 godina.

Promijenimo u ovom trenutku početne uvjete i zapitajmo se: što bi se dogodilo da je Maja starija od Danijela, primjerice pet puta?

Tada bismo Majine godine predstavili s pet kvadrata pa bismo, zajedno s Danijelovim jednim, imali 6 kvadrata. Dijeljenjem  $24 : 6$  dobijemo 4, što znači da bi Danijel imao 4 godine, a Maja 20 godina.

**Primjer 6.** Josip je sakupio 13 sličica više od svog brata Ante. Koliko sličica ima Josip, a koliko Ante ako zajedno imaju 47 sličica?

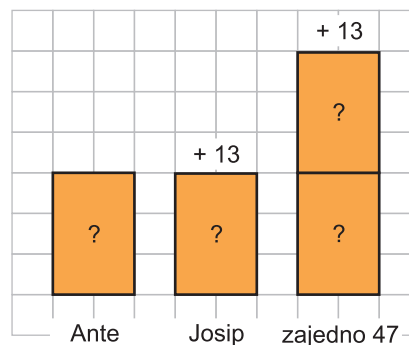
Kako bi zadatak riješio učenik šestog razreda?

Ne znamo koliko je sličica sakupio Ante pa taj broj označimo s  $x$ . Josip je sakupio 13 sličica više od njega, dakle  $x + 13$ . Zbroj sličica oba brata mora biti 47 pa postavimo jednadžbu, a zatim je i riješimo:

$$\begin{aligned} x + (x + 13) &= 47 \\ x + x + 13 &= 47 \\ 2x + 13 &= 47 \\ 2x &= 47 - 13 \\ 2x &= 34 / : 2 \\ x &= 17. \end{aligned}$$

S  $x$  smo označili broj Antinih sličica, što znači da ih Ante ima 17, a Josip 30.

Kako ovaj zadatak riješiti bez jednadžbi? Pogledajmo sliku:



Zamislimo da je Ante sve svoje sličice stavio u album (predstavljen pravokutnikom). Album je posve pun, ali ne znamo koliko u njemu ima sličica. Josip

je svoje sličice slagao u identičan album, no kako on ima 13 sličica više od brata tih 13 sličica koje nisu stale u album ostavio je izvan njega.

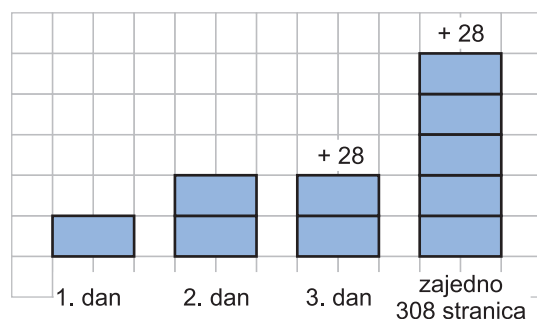
Treći stupac predstavlja, dakle, dva albuma s nepoznatim (ali jednakim) brojem sličica i još dodatnih 13 sličica. Kako odrediti koliko sličica ima u albumu ako znamo da sveukupno postoji 47 sličica?

Zamislimo najprije da je Josip svojih 13 sličica, koje ionako ne mogu stati u album, poklonio nekom trećem prijatelju. Braći bi tada ostale  $47 - 13 = 34$  sličice, smještene u dvama posve jednakim albumima. Broj sličica u jednom od njih očito dobijemo dijeljenjem  $34 : 2 = 17$  komada. Nakon što smo otkrili vrijednost početnog pravokutnika (17), lako se vidi da Ante ima 17, a Josip 30 sličica.

Ovim smo ne samo riješili zadatak, nego i otkrili strategiju za rješavanje sličnih zadataka takvog tipa. Očito je najprije potrebno od ukupnog broja oduzeti "višak", a zatim rezultat dijeliti s 2. Da je, primjerice, Josip imao 5 sličica više od Ante, oduzeli bismo  $47 - 5 = 42$ , a zatim podijelili  $42 : 2 = 21$ . Ante bi tada imao 21, a Josip 26 sličica.

**Primjer 7.** Knjigu koja ima 308 stranica Marija je pročitala u 3 dana. Drugog je dana pročitala dvostruko više stranica nego prvog dana, a trećeg 28 stranica više nego drugog dana. Koliko je stranica Marija pročitala po danima?

Ovaj zadatak očito je kombinacija prethodnih dvaju primjera. Nacrtajmo sliku:



Ne znamo koliko je stranica Marija pročitala prvog dana. To je prikazano jednim pravokutnikom, čiju vrijednost želimo izračunati.

Drugoga dana Marija je pročitala dvostruko više nego prvog dana. To prikazujemo dvama početnim pravokutnicima.

Trećega dana pročitala je 28 stranica više nego drugog dana. Dakle, na dva pravokutnika iz drugog dana dodajemo broj 28.

Što imamo u svim trima danima zajedno? Pet jednakih pravokutnika i broj 28.

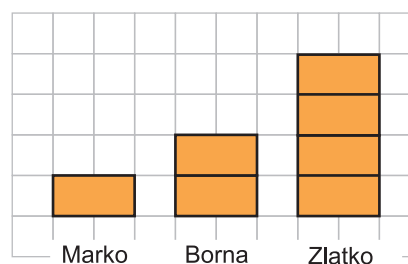
Znamo da tih pet pravokutnika i broj 28 zajedno iznose 308 stranica. Kako iz toga dobiti vrijednost jednog pravokutnika? Očito treba oduzeti  $308 - 28 = 280$ , a zatim podijeliti  $280 : 5 = 56$ . Vrijednost jednog pravokutnika je 56 stranica.

Marija je, dakle, prvog dana pročitala 56, drugog 112, a trećeg dana 140 stranica.

Posljednji primjer u tekstu uzet je s jednog općinskog natjecanja iz matematike učenika petih razreda.

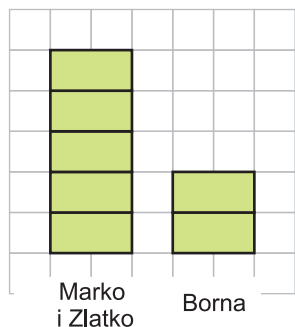
**Primjer 8.** Marko, Borna i Zlatko imaju određen broj pikula. Borna ima dva puta više pikula od Marka, a Zlatko ima dva puta više pikula od Borne. Zbroj Markovih i Zlatkovih pikula za 153 je veći od broja Borninih pikula. Koliko pikula ima svaki od dječaka?

Najbolje je krenuti od učenika koji ima najmanji broj pikula, a to je Marko. Broj njegovih pikula prikazujemo jednim pravokutnikom. Iz teksta slijedi da ćemo broj Borninih pikula prikazati dvama, a Zlatkovih četirima jednakim pravokutnicima. Evo slike:



U zadatku se uspoređuje broj Borninih pikula sa zbrojem Markovih i Zlatkovih pikula. Na sljedećoj

će slici Borna i dalje imati dva pravokutnika, dok će Marko i Zlatko zajedno imati pet pravokutnika.



Sa slike se lako primjećuje da Marko i Zlatko imaju 3 pravokutnika više od Borne. Kako je u zadatku navedeno da njih dvojica imaju 153 pikule više od Borne, učenik zaključuje da je vrijednost tih triju pravokutnika upravo 153. Vrijednost jednog pravokutnika dobit ćemo dijeljenjem  $153:3$ , što je 51.

Time smo, služeći se početnom slikom, riješili zadatak. Marko ima 51, Borna 102, a Zlatko 204 pikule.

\* \* \*

Na kraju, slijedi nekoliko zadataka koji učenicima četvrtog i petog razreda mogu pomoći u usvajanju navedene grafičke metode rješavanja linearnih jednadžbi.

**Zadatak 1.** Košulja s kravatom stoji 261 kunu. Kolika je cijena košulje, a kolika kravate ako je košulja osam puta skuplja od kravate?

**Zadatak 2.** Majstor Marko uvodi centralno grijanje, a naplaćuje tako da za svoj rad uzme polovinu cijene potrošenog materijala. Koliko je zaradio kod gospodina Modrića koji je za materijal i majstora zajedno potrošio 2652 kune?

**Zadatak 3.** Na testu iz matematike Branko je imao 5 bodova manje od Marine. Koliko je bodova imao Branko, a koliko Marina ako su zajedno imali 29 bodova?

**Zadatak 4.** Franjo i njegov tata zajedno imaju 50 godina. Koliko godina ima Franjo ako je na dan njegova rođenja tata imao 32 godine?

**Zadatak 5.** Sestra je starija od brata 3 godine, isto kao i tata od mame. Koliko godina ima svatko od njih ako je mama četiri puta starija od kćeri, a svi zajedno imaju točno 100 godina?

**Zadatak 6.** Gospodin Žutić prodaje lubenice na tržnici. Pun kamion u kojem je bilo 277 lubenica prodao je za četiri dana. Svakoga dana prodao je dvije lubenice više od dvostrukog broja prodanih lubenica prethodnog dana. Koliko je lubenica prodao trećeg dana?

### LITERATURA

Razni autori: "Matematičke priče", udžbenici za 1. – 4. razred osnovne škole (Profil, Zagreb).

## Državni stručni skupovi – Opatija, 2010. (najava)

U organizaciji Agencije za odgoj i obrazovanje u Opatiji, u Grand hotelu Adriatic, održat će se početkom mjeseca travnja stručni skupovi nastavnika matematike osnovnih i srednjih škola.

Od 6. do 8. travnja 2010. bit će održan skup za nastavnike osnovnih škola, a od 8. do 10. travnja 2010. održat će se skup za nastavnike srednjih škola. Rok prijave za oba skupa jest 15. ožujak 2010. Prijavu za sudjelovanje poslati na [neda.lesar@azoo.hr](mailto:neda.lesar@azoo.hr).

Uz neke zanimljive teme iz metodike nastave matematike središnja tema i na jednom i na drugom skupu bit će nacionalni kurikulum. Više detalja doznajte na adresi <http://www.azoo.hr/tekst/matematika-/2210>