

Kutija maksimalnog volumena

Alena Dika,
Nikola Skočić, Rijeka

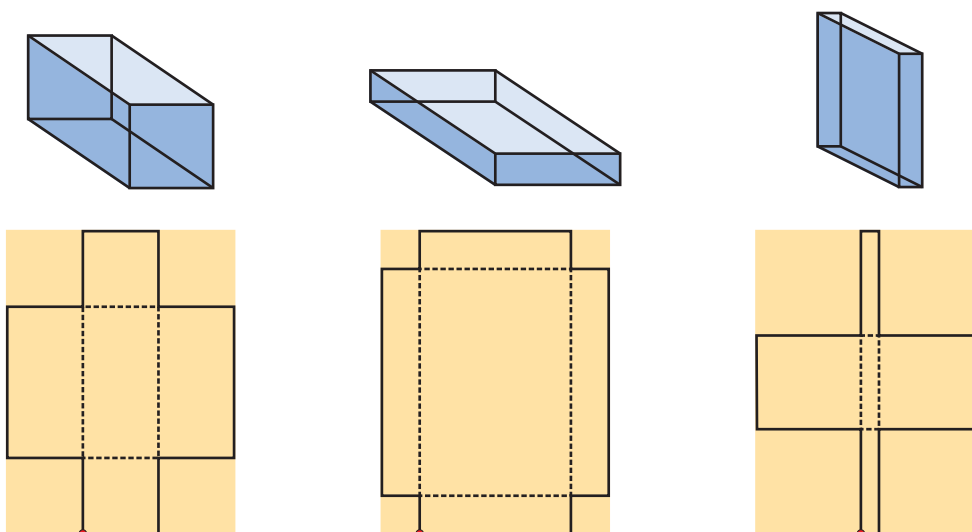


Želja je svakog učitelja redovitu nastavu obogatiti oblicima rada koji će promijeniti svakodnevnu rutinu te unijeti u učionicu nove načine poučavanja i duh kreativnosti. Tomu najviše pogoduje radionički oblik nastave koji omogućuje aktivno sudjelovanje učenika u obradi sadržaja, pomaže učenicima da osvijeste problemske matematičke sadržaje i osposobljava ih za samostalni rad. Potaknuti takvim razmišljanjima moj kolega i ja (autori ovog članka) upustili smo se u pripremu radionice s nazivom *Kutija maksimalnog volumena*.

Ovom radionicom željeli smo pred učenike postaviti problem iz svakodnevnog života, izazvati ih da otkriju osobne vještine i iskoriste matematičko znanje kojim raspolažu u rješavanju tog problema.

U imenu ove radionice krije se poznati matematički problem, koji je povezan i s problemom iskoristivosti materijala za izradu ambalaže. Ukratko: potrebno je od pravokutnika dimenzija $n \times m$ složiti otvorenu kutiju maksimalnog volumena izrezujući pri vrhovima toga pravokutnika kvadrate.

Različitim odsječcima dobivaju se kutije različitog oblika, tj. različitog volumena. Zadacima koje ćemo postaviti u radionici učenici će pokušati izračunati duljinu stranice kvadratnog odsječka čijim ćemo odsijecanjem na pravokutnoj ploči dobiti kutiju maksimalnog volumena. Cilj je da tu činjenicu učenici na završetku radionice sami otkriju. Sudjelovanjem u radionici učenici će moći artikulirati rješenja na više načina: verbalno, slikovno, modeliranjem, tablično i grafom, što radionicu čini istraživačkom.



ZADACI RADIONICE:

- povezati matematičke sadržaje s problemima iz svakodnevnog života;
- znati analizirati podatke zabilježene u tablici;
- crtati i proučavati grafove te čitati iz grafova moguća rješenja;
- uočiti odnos dviju veličina od kojih je jedna ovisna o drugoj (kako se mijenja volumen kutije u ovisnosti o duljini stranice četiriju izrezanih kvadrata);
- ponoviti pravokutni koordinatni sustav u ravnini;
- upoznati se s pojmom optimiranja i maksimuma.

Tijek radionice

Predviđeno je da radionica traje dva školska sata.

1. problem ambalaže (5 min);
2. izrezivanje kutije (20 min);
3. obrada podataka i crtanje grafa (20 min);
4. analiza problema (20 min);
5. vizualizacija problema *GeoGebra*nim apletom (15 min);
6. evaluacija radionice (10 min).

Opis aktivnosti

1. Problem ambalaže

Učenici su na jednom listiću unaprijed dobili zadatak da se informiraju ili prikupe podatke o tome što znači učinkovito iskoristiti materijal pri izradi ambalaže, u kojim je granama gospodarstva ambalaža vrlo važna i da razmisle o ulozi matematike u izradi ambalaže.

Kroz razgovor, zaključili smo da učinkovito iskoristiti materijal u izradi ambalaže znači potrošiti što manje materijala, a da proizvod bude pravilno zapakiran.

Zadovoljni uvodnim razgovorom s učenicima, mogli smo nastaviti radionicu. Najprije smo učenike podijelili u četiri skupine od pet ili šest učenika.

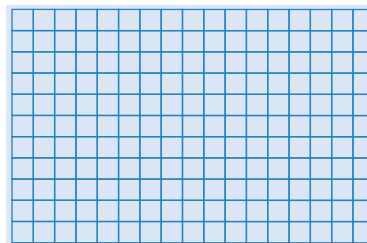
2. Izrezivanje kutije

Učenici dobivaju prvi listić s uputama za rad. Problem je pojednostavnjen time što je učenicima zadano da kutiju izrade od papira kvadratnog oblika.

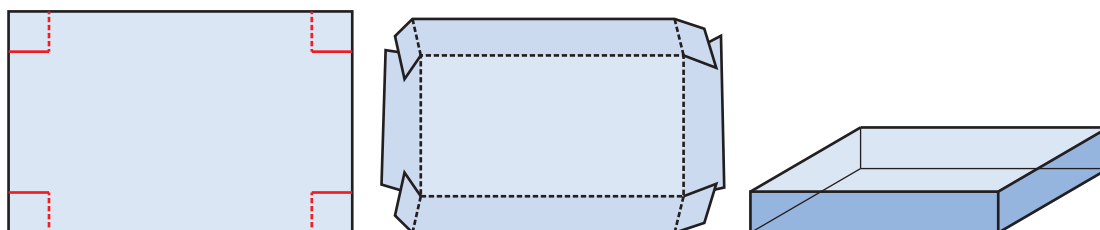
LISTIĆ 1

Na raspolaganju vam je papir s otisnutom kvadratnom mrežom kao na slici 1 (op. a.: ovakvu kvadratnu mrežu jednostavno je otisnuti kompjutorom). Izrežite kvadrat zadane dimenzije:

- 1. skupina 18×18 ;
- 2. skupina 24×24 ;
- 3. skupina 30×30 ;
- 4. skupina 36×36 .



Slika 1.



Slika 2.

Odrežite kvadrate na kutovima ove kvadratne površine. Neka svaki učenik u skupini odreže drukčiji kvadrat – duljine stranica odrezanih kvadrata svakog učenika u skupini neka budu *različite*. Zatim od dobivenog oblika složite kutiju. Na kutiju zapišite svoje ime i dimenzije kutije: duljinu, širinu i visinu te izračunajte i zapišite njezin volumen. (Vidi sliku 2.)

Vaš je zadatak da otkrijete kolika mora biti duljina stranice odrezanih kvadrata da bi dobivena kutija bila maksimalnog volumena.



Kraj 1. listića

Ovako osmišljen redoslijed radnji učenicima ukazuje na tijek i mogući završetak radionice, što će im biti od pomoći u donošenju zaključaka i rješenja. Unutar skupine učenici se dogovaraju, razvijaju suradničke vještine, hrabrije iznose svoja razmišljanja i zaključke. Neuspješnijim učenicima, ovakav rad omogućit će da se s više samopouzdanja uključe u intelektualne aktivnosti skupine, a da pritom ne

osjećaju teret prevelike odgovornosti ili strah da će zaključiti ili misliti pogrešno.

3. Obrada podataka i crtanje grafa

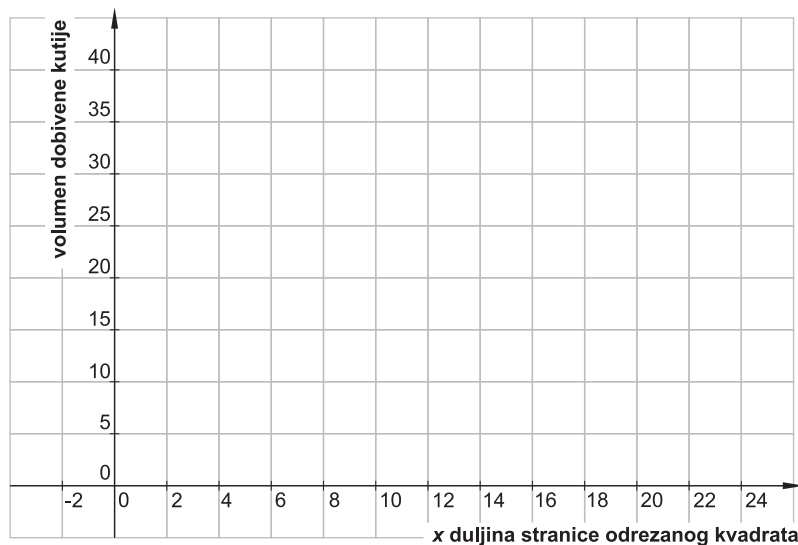
Učenici su rezultate iz prethodne aktivnosti bilježili u tablicu na sljedećem listiću:

LISTIĆ 2

Ispunite tablicu prema zabilježenim podacima na izrađenim modelima kutija.

| Ime i prezime | Duljina stranice odrezanog kvadrata | Duljina dobivenog modela kutije | Širina dobivenog modela kutije | Volumen dobivenog modela kutije |
|---------------|-------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Zapišite uređene parove tako da im prvi član bude duljina stranice odrezanog kvadrata, a drugi pripadajući dobiveni volumen. Zatim ih smjestite u pravokutni koordinatni sustav u ravnini.



Kraj 2. listića

U ovoj fazi rada učenici podatke prikazuju grafom. Proučavajući graf, uočavaju da je maksimalan volumen kutije postignut tako da se na vrhovima zadane kvadratne plohe izrežu kvadrati duljine $1/6$

duljine stranice. U ovome trenutku učenike valja upoznati s pojmom maksimuma grafa i istaknuti na koji način volumen dobivene kutije ovisi o duljini početne kvadratne plohe te ponoviti pojam funk-

cije i ovisnost dviju veličina. Stoga, ako je kvadrat imao stranicu duljine 36 mjernih jedinica, maksimalan volumen kutije dobiven je tako da se na njezinim vrhovima izrežu kvadrati čije duljine stranica iznose 6 mjernih jedinica.

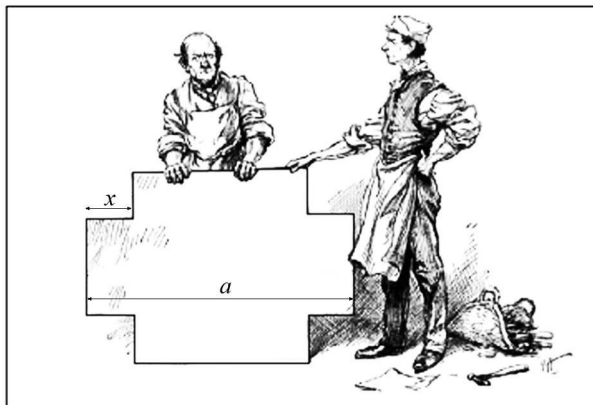
4. Analiza problema

U ovome dijelu učenici moraju zaključke donesene na prethodnoj aktivnosti prenijeti na papir i snaći se u algebarskom prikazu donesenog zaključka.

Za analizu problema kutije maksimalnog volumena pripremljen je treći listić koji je izgledao ovako:

LISTIĆ 3

Pretpostavite da je duljina stranice papira a , a s x označite duljinu stranice kvadrata koji izrezujete.



Zajedničkim radom u skupini nadopunite sljedeće:

DULJINA VISINE DOBIVENOG MODELA KUTIJE JE DULJINA _____.

SLUŽEĆI SE PRETHODNO NAVEDENIM OZNAKAMA, DULJINU DOBIVENOG MODELA KUTIJE MOŽEMO OZNAČITI S _____.

SLUŽEĆI SE PRETHODNO NAVEDENIM OZNAKAMA, ŠIRINU DOBIVENOG MODELA KUTIJE MOŽEMO OZNAČITI S _____.

VOLUMEN DOBIVENOG MODELA KUTIJE DOBIT ĆEMO S POMOĆU FORMULE _____.

S OBZIROM NA TO DA JE x DULJINA STRANICE KVADRATA I VISINA DOBIVENOG MODELA KUTIJE, KOJI UVJET MORA ZADOVOLJAVATI DA BI VOLUMEN KUTIJE BIO MAKSIMALAN?

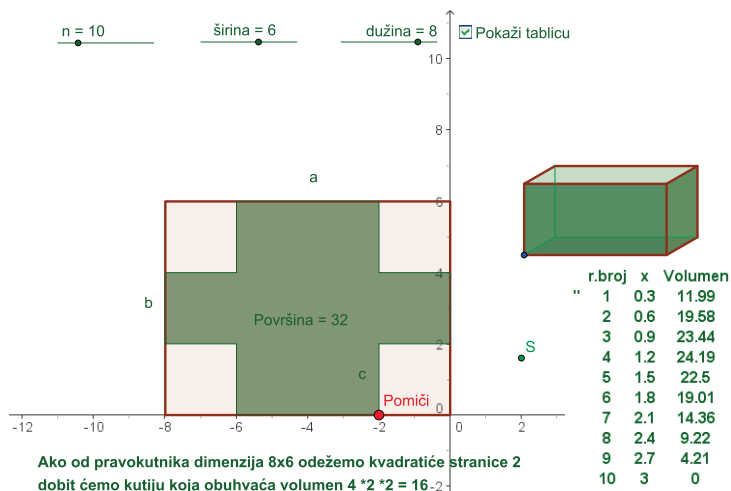
Kraj 3. listića

5. Vizualizacija primjenom GeoGebrina apleta

Ponekad u radu koristim matematički dinamički softver *GeoGebra* pa sam i ovom prigodom, u fazi koncipiranja radionice, razmišljala može li se navedeni problem vizualizirati i dinamički prikazati matematičkim softverom. Korisno je učenicima zorno prikazati problem. Svjesna da bi se rješenje učenicima na taj način istovremeno moglo prikazati i podacima i slikom i grafom, uz dinamičnu sliku problema, zatražila sam pomoć kolega iskusnih u izradi takvih programa te ga i sama pokušala izraditi.

Aplet koji vizualizira ovaj problem uspješan je uradak mojih kolega s *Diskusijske liste nastavnika matematike*, Ele Rac i Šime Šuljića, koji su ga metodički osmislili, a možete ga naći pod istim imenom ove radionice na stranicama udruge *Normala* (<http://www.normala.hr>) u "Riznici apleta".

Ovako to izgleda na apletu:



Softverska rješenja ovog problema mogu se naći na mnogim internetskim stranicama, a prezentirani su različitim matematičkim dinamičkim programima (*GeoGebra*, *SketchPad*...).

6. Evaluacija

Evaluaciju radionice ostvarili smo na sljedećem satu razgovarajući s učenicima koji su izrazili pozitivan stav prema radioničkom obliku rada. Zanimljiv im je, vrijeme im u skupnom radu protječe brže, a primjena matematike u stvarnom životu "ozbiljan" predmet čini zabavnijim.

Zaključak

Problem kutije maksimalnog volumena samo je jedan od primjera problema optimiranja, modeliranja ili matematičkog programiranja, a odnosi se na proučavanje problema koje nastoji maksimizirati ili minimizirati realnu funkciju sustavnim odabirom vrijednosti realnog ili cijelog broja na domeni zadane realne funkcije. Mogli bismo reći da je optimiranje pronalaženje algoritama s konačnim slijedom dobro definiranih naredaba koji će ubrzati izvođenje i ostvarenje početnog zadatka. Naš zadatak je bio pronaći kutiju maksimalnog volumena.

Problem kutije maksimalnog volumena ili *Open box problem* jest problem koji se obično analizira i proučava na višoj matematičkoj razini od one koja je prikazana ovdje, a povezan je s problemom maksimuma i prvom derivacijom funkcije. Takav način ne bi bio primjeren osnovnoškolskom uzrastu djece i baš ta činjenica predstavlja izazov: kako kompleksnije sadržaje približiti učenicima osnovne škole, a na način koji bi im bio razumljiv i nadasve zanimljiv. Nadamo se da smo, barem djelomice, u tome uspjeli.