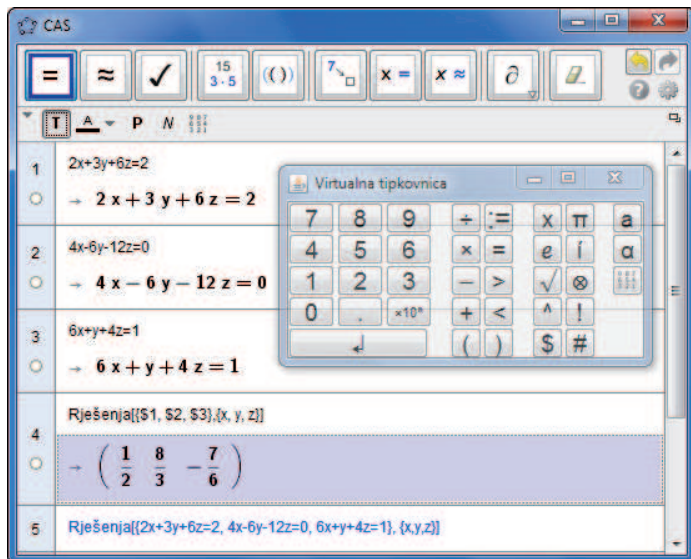


# GeoGebra 4.2

## – nove mogućnosti



Slika 1.

Šime Šuljić, Pazin

Krajem 2012. izašla je nova verzija specijaliziranog računalnog programa za nastavu matematike – *GeoGebra* 4.2. Na službenoj stranici programa ističu da zahvaljujući radu 21 razvojnog programera nova inačica programa je prije svega **stabilna** i **ubrzana**.

Posebno se to odnosi na uratke koji u sebi obiluju naredbama:

- `Niz[ <izraz>, <varijabla>, <početna vrijednost>, <krajnja vrijednost>, <korak povećanja> ]`
- te naredbama **Derivacija**, **Integral**, **Stupanj**, **Koeficijenti** i **Proširi**, koje se odnose na polinom kao objekt.

### CAS (engl. *computer algebra system*) – sustav za računalnu algebru

Najveća novina je poseban prozor za manipulaciju algebarskim izrazima, funkcijama, jednadžbama, matricama, brojevima, skupovima podataka... S tim se izrazima može manipulirati u algebarskom smislu, recimo proširivati ih ili reducirati, supstituirati u druge izraze ili izračunavati za pojedinu

vrijednost varijable, rješavati jednadžbe i sustave jednadžbi, rješavati numerički, derivirati, integrirati, rastavljati na faktore, izračunavati aproksimativnu vrijednost i tako dalje. Na slici 1 prikazano je rješavanje sustava triju linearnih jednadžbi s trima nepoznicama. Na raspolaganju je i virtualna tipkovnica koja olakšava unos u polja CAS prozora. Uočite peti redak u kojem se razaznaje da se do rješenja moglo doći samo upisom naredbe u jedno polje.

Redak za unos u CAS prozoru koristi se isto kao i *GeoGebra*na traka za unos sa sljedećim razlikama:

- možete koristiti varijable bez pridruženih vrijednosti. Primjerice nakon unosa  $(2a - 3b)^2$  i pritiska tipke *Enter* daje  $4a^2 - 12ab + 9b^2$ .
- znak  $=$  se koristi u jednadžbama, a znak  $:=$  za pridruživanje vrijednosti.

## Osnove unosa u CAS polja

- tipka *Enter* izračunava unos, proširi izraz ili samo dodjeljuje prirodni matematički zapis
- *Ctrl* + *Enter* daje numeričku vrijednost izraza. Primjerice `sqrt(2)` daje 1.41.
- *Alt* + *Enter* zadržava unos u zadanom obliku bez obzira na pridružene vrijednosti. Primjerice `a + b` ostaje `a + b`.
- Ako u novi, prazan redak pritisnete:
  - razmaknicu – pojavit će se prethodni izlazni rezultat
  - desnu zagradu `)` – daje prethodnu vrijednost u zagradama
  - znak `=` daje prethodnu ulaznu vrijednost
- Izlaznu vrijednost možete onemogućiti dodavanjem točke sa zarezom na kraju unosa, npr. `a:=3;`

## Pokazivanje i skrivanje objekata

Klikom na prazni kružić ispod rednog broja retka CAS objekt će postati vidljiv u grafičkom prikazu, ako je to moguće. Ponovnim klikom na (sada) puni kružić, opet postaje skriven u grafičkom prikazu.

## Alatna traka CAS prikaza

Na slici 1 uočljiva je alatna traka koja se može koristiti nad unosom u polja. Redom su to: izračun, aproksimacija, zadržavanje unosa, faktORIZACIJA, proširivanje, supstitucija, rješavanje jednadžbi, rješavanje jednadžbi numerički, derivacija i integral.

Nakon unosa u redak dovoljno je da kliknete na željeni alat ali također možete odabrati lijevom tipkom miša dio unosa i nad tim dijelom upotrijebiti određeni alat.

## Pridruživanje vrijednosti i veze s *GeoGebrom*

- Za pridruživanje koristi se znak `:=`, npr. `b:= 5`, `a(n):= 2n + 3`
- Kako biste oslobodili naziv varijable za novu uporabu, koristite naredbu **Izbriši [b]** ili samo `b:=`

- Redefiniranje varijable ili funkcije morate provesti u retku u kojem su zadane, jer će inače biti tretirane kao novi objekti i samim time biti preimenovani.
- Varijable i funkcije uvijek su zajedničke za CAS prikaz i *GeoGebru* ako je to moguće. Ako definirate `b:=5` u CAS prikazu, tada možete koristiti `b` u čitavoj *GeoGebri*. Ako imate funkciju `f(x)=x^2` u *GeoGebri*, također je možete koristiti u CAS prikazu.

## Pozivi redaka

Druge retke u CAS prikazu možete pozvati na dva načina

- Statički poziv retka uključit će tekst iz pozvanog retka ali takav unos neće biti izmijenjen ako se kasnije pozvani redak bude mijenjao.
  - `#` uključit će prethodni izlaz (rezultat)
  - `#5` uključit će izlaz (rezultat) iz stupca 5
- Dinamički poziv retka koristi tekst iz drugog retka i sam će se nadograditi ako se pozvani redak bude mijenjao.
  - `$` uključit će prethodni rezultat
  - `$5` uključit će rezultat iz stupca 5

## Jednadžbe

- Jednadžbe se zapisuju upotrebom znaka jednakosti, npr. `3x + 5 = 7`
- Možete izvršavati aritmetičke operacije nad jednadžbom, npr. `(3x + 5 = 7) - 5` oduzima 5 od obje strane jednadžbe. Ovo je korisno kod ručnog rješavanja jednadžbe.
- **LijevaStrana**[`3x + 5 = 7`] daje `3x + 5` a **DesnaStrana**[`3x + 5 = 7`] daje 7.

## Posebne CAS naredbe

Klikom na ikonu *trokutić* desno od trake za unos otvara se *Pomoć za unos*. Tu se nalaze grupirane naredbe. Jednu grupu čine posebne CAS naredbe od kojih neke vrijede i u traci za unos, a neke samo u CAS prikazu. Neke od njih su posebno zanimljive i jednostavno vas izazivaju da ih probate:

- Djelitelji[ <broj> ] i ListaDjelitelja[ <broj> ]
- Faktori[<polinom>], Faktori[<broj>]
- ImplicitnoDeriviranje[ <f(x, y)> ], ImplicitnoDeriviranje[ <izraz>, <zavisna varijabla>, <nezavisna varijabla> ]
- InverznaMatrica[ <matrica> ] i TransponiranaMatrica[ <matrica> ]
- InverzniNiz[ <lista> ]
- Iteracija[ <funkcija>, <početna vrijednost>, <broj iteracija> ]
- IteracijskaLista[ <funkcija>, <početna vrijednost>, <broj iteracija> ]
- JeLiProst[ <broj> ] i ProstiFaktori[ <broj> ]
- KompleksniKorijen[ <polinom> ]
- Limes[ <izraz>, <vrijednost> ], Limes[ <izraz>, <varijabla>, <vrijednost> ]
- CjelobrojnoDijeljenje[ <broj djeljenik>, <broj djelitelj> ], CjelobrojnoDijeljenje[ <polinom djeljenik>, <polinom djelitelj> ]
- OstatakDijeljenja[ <broj djeljenik>, <broj djelitelj> ], OstatakDijeljenja[ <polinom djeljenik>, <polinom djelitelj> ]
- ParcijalniRazlomci[ <funkcija> ], ParcijalniRazlomci[ <funkcija>, <varijabla> ]
- PotpuniKvadrat[<kvadratna funkcija>]
- PrethodniProstBroj[ <broj> ] i SljedećiProstBroj[ <broj> ]
- Pomiješaj[ <lista> ]
- Racionaliziraj[ <broj> ]
- SlučajniPolinom[ <stupanj>, <minimum za koeficijente>, <maksimum za koeficijente> ], SlučajniPolinom[ <varijabla>, <stupanj>, <minimum za koeficijente>, <maksimum za koeficijente> ]
- ZajedničkiNazivnik[ <izraz>, <izraz> ]

- TrigProširi[ <izraz> ], TrigProširi[ <izraz>, <ciljna funkcija> ], TrigProširi[ <izraz>, <ciljna funkcija>, <ciljna varijabla> ], TrigProširi[ <izraz>, <ciljna funkcija>, <ciljna varijabla>, <ciljna varijabla> ]

Klikom na gumb *Pomoć na Mreži* kroz objašnjenja i primjere brzo se shvati njihova moć.

## Prirodni zapis

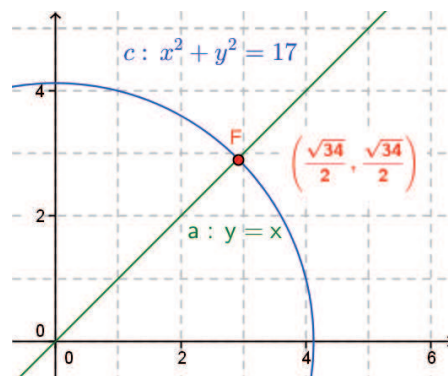
Na slici 1 možete uočiti da su rješenja sustava zapisana u obliku razlomka. To je *GeoGebra* napravila sama od sebe, kao što će i za kvadratnu jednadžbu  $x^2 + x - 1 = 0$  u CAS prozoru dati rješenja:

$$\left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right\}.$$

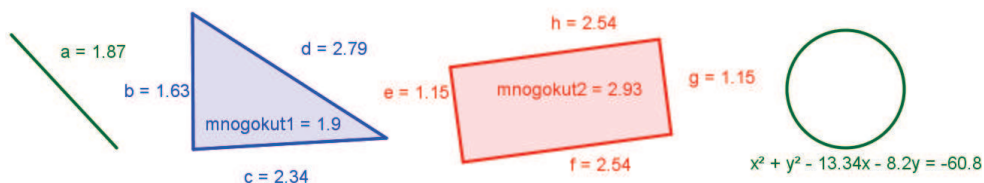
Ta rješenja su u ovaj tekst unesena kao slika koju je generirala *GeoGebra*. Dovoljno je desnim klikom na formule upaliti skočni izbornik pa izabrati *Kopiraj sliku*. Moguće je prenijeti i LaTeX zapis:

$\mathbf{\left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{-\sqrt{5}-1}{2} \right\}}$ .

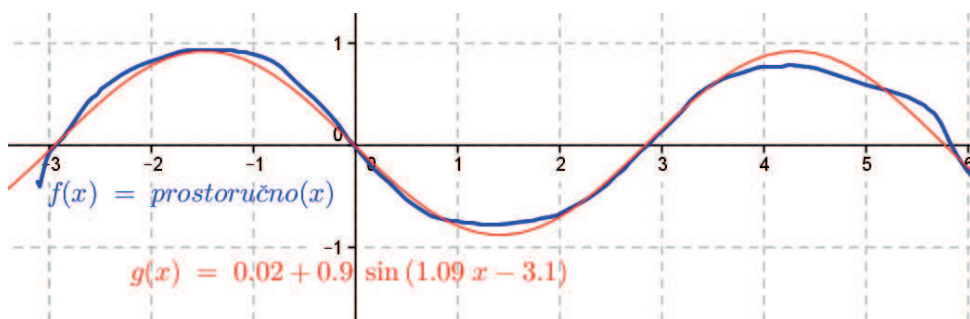
Postoji i posebna naredba koja koordinate točaka ili brojeve može pretvoriti u prirodni matematički zapis. Na slici 2 vidite da je točka *F* sjecište pravca i kružnice. Ako zadamo naredbu: **PrirodniZapis[F]**, dobit ćemo zapis koordinata točaka



Slika 2.



Slika 3.



Slika 4.

kao na slici, odnosno u obliku koji bismo dobili da rješavamo zadatak na papiru.

Ako imamo decimalni broj s bar deset točnih decimalnih mjesta, *GeoGebra* ga može prikazati u prirodnom matematičkom zapisu:

- **PrirodniZapis**[0.86602540378] daje  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- **PrirodniZapis**[5.382332347441762, {sqrt(2), sqrt(3), sqrt(5)}] daje  $\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$
- **PrirodniZapis**[3.718281828459045, {exp(1)}] daje  $e + 1$ .

Novi alat:

## Lik crtan prostoručno

Jedini novi alat u inačici 4.2 je alat *Lik crtan prostoručno* s ikonom olovke i parabole. Alat je posebno pogodan za crtanje po *pametnoj ploči* gdje prstom možete crtati dužine, mnogokute, kružnice ili grafove funkcija. Na zaslonu računala za to rabite

miš ili posebnu olovku. Na slici 3 vidite nekoliko objekata nacrtanih na taj način. Potrebno je malo vještine da vam *GeoGebra* prihvati nacrtani lik ali kad ga prepozna, "popravlja" ga i pridjeljuje mu duljine stranica, površinu ili čak jednačbu u slučaju kružnice.

Prostoručno možete crtati čak i grafove funkcija. *GeoGebra* im uvijek pridjeljuje "jednačbu"  $f(x) = \text{prostoručno}(x)$ . Međutim s nekom od naredbi iz skupine *Prilagodba* možete doista dobiti jednačbu približne funkcije. Na slici 4 vidite prostoručno nacrtanu sinusoidu i zatim njoj pridijeljenu jednačbu dobivenu naredbom **PrilagodbaSinusna**[f].

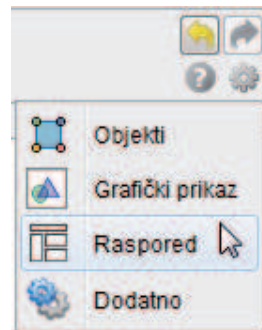
## Postavke programa

Uočite u *alatnoj traci*, odnosno u desnom gornjem kutu prozora programa, a ispod ikona za *poništi* i *ponovi*, dvije nove ikone. Upitnik se odnosi na pomoć alatnoj traci. Klikom na nj otvara se skočni izbornik s kratkom pomoći za odabrani alat i s gumbom koji vas vodi do opširnije pomoći na Mreži.

Ikona zupčanika vam otvara izbornik (slika 5):

- Objekti – možete uređivati svojstva već definiranih objekata
- Grafički prikaz – uređenje grafičkih prikaza
- Raspored – možete prema svom ukusu napraviti razmještaj prikaza i traka. Tu je novina *bočna traka prikaza* koju vidite pri pokretanju programa, a po potrebi je klikom na trokutić na bočnom rubu možete aktivirati. Nudi gotove kombinacije različitih *GeoGebrinih* prikaza.
- Dodatno – nudi neke generalne postavke programa.

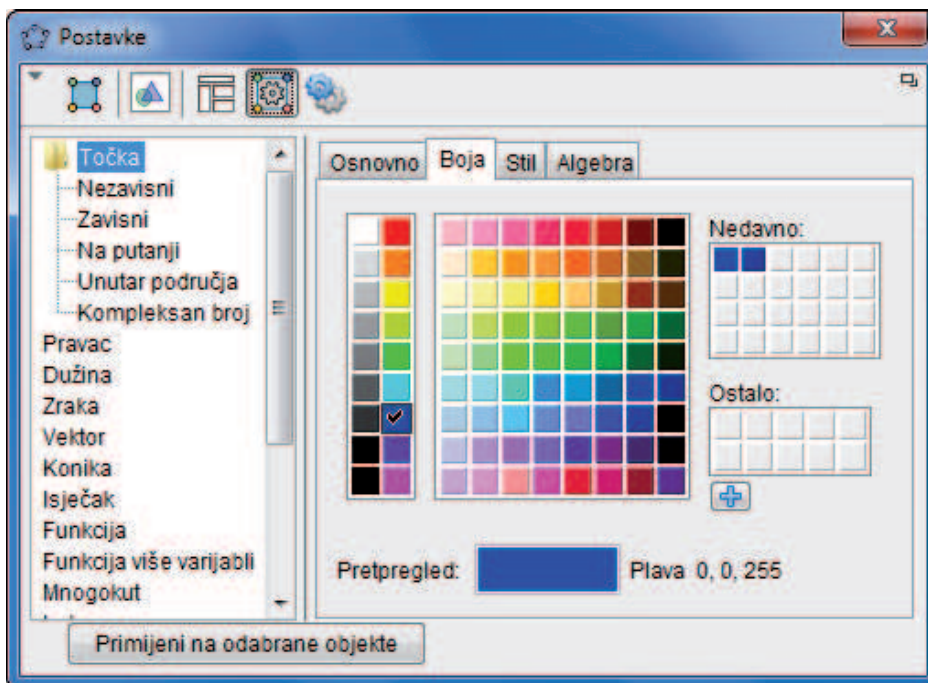
Bez obzira koju opciju odaberete uvijek se otvara isti prozor na kojem pomoću ikona možete birati željenu karticu. Četvrta ikona po redu (slika 6) odnosi se na zadane postavke objekata. To znači da možete podesiti da vam program točke, pravce ili neke druge objekte uvijek crta određene boje, veličine i stila.



Slika 5.

## Poboljšanja

1. **Alat za brisanje** s ikonom gumice sada možete doslovce koristiti kao gumicu, to jest da prelazite njime amo-tamo po objektima. Slično kao u drugim programima za crtanje.
2. Alat **Translacija za vektor** sada možete koristiti bez prethodno zadanog vektora. Jednostavno kliknete na željeni objekt i povlačite njegovu sliku koja se pritom premješta na novo mjesto.



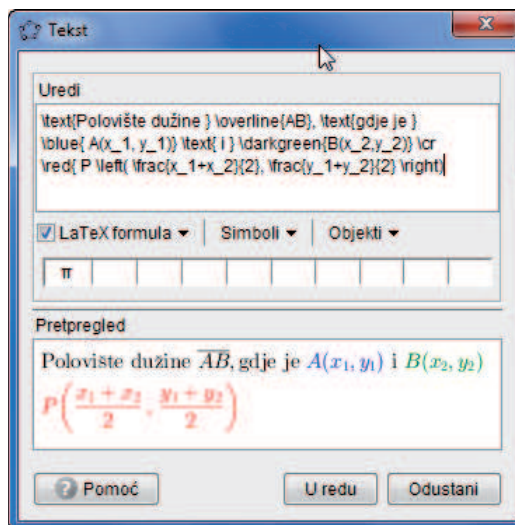
Slika 6.

3. Alat **Vektorski mnogokut** konstruira mnogokut koji čuva oblik kada ga se povlači za prvi nacrtani vrh, a mijenja oblik povlačenjem za ostale vrhove. Držeći pritisnutu tipku *Alt* dok konstruirate ovaj mnogokut, moći ćete dobiti kutove koji su višekratnici od  $15^\circ$ . Klikom na već postojeći mnogokut dobit ćete njegovu kopiju.
4. Alat **Kruti mnogokut**: odaberite sukcesivno najmanje tri nezavisne točke koje će biti vrhovi mnogokuta i zatim ponovno kliknite na početnu točku kako biste završili mnogokut. Dobiveni mnogokut će zadržati svoj izgled: moći ćete ga jedino pomicati i rotirati pomoću vrhova. Držeći pritisnutu tipku *Alt* dok konstruirate ovaj mnogokut, moći ćete dobiti kutove koji su višekratnici od  $15^\circ$ . Klikom na već postojeći mnogokut dobit ćete njegovu krutu kopiju.
5. U **Algebarskom prikazu** sada je moguće prikazati sve objekte uključivši tekstove i slike. A njih možete razvrstati po:
  - a. zavisnosti,
  - b. vrsti,
  - c. razini vidljivosti (razinu možete dodjeljivati sami na kartici svojstva objekta),
  - d. redoslijedu konstrukcije.
6. Izradite li neki novi korisnički alat, izravno ga možete dijeliti s ostalim korisnicima internetom preko izbornika **Upravljanje alatima**.
7. Za množenje brojeva *a* i *b* ili drugih objekata nužno je bilo ostaviti razmak između, a sada program prepoznaje *ab* kao umnožak.

### Pisanje teksta u LaTeX-u

Značajno je poboljšano pisanje LaTeX tekstova. Sada formule ili njene dijelove možete prikazati u bojama. Na raspolaganju su sljedeće boje:

```
\lightviolet \lightyellow \lightgreen \lightorange
\yellow \darkblue \lightpurple \lightblue \maroon
\lightgray \pink \gold \black \orange \indigo
\purple \darkgray \green \silver \white \lime
\gray \darkgreen \magenta \cyan \red \crimson
\turquoise \blue \violet \brown \aqua
```



Slika 7.

## Jednadžba lokusa

U nekoliko navrata razvoj *GeoGebre* podupro je i Google. Španjolski student Sergio Arceo je kroz projekt *Google summer of code* radio na određivanju jednadžbi krivulje koju se dobije konstrukcijom skupa točaka zadanog određenim uvjetom, odnosno naredbom

Lokus[ <točka koja određuje crtu lokusa>, <gibajuća točka> ].

Iako je do jednadžbe moguće doći samo u određenim jednostavnijim slučajevima koristeći tzv. **Gröbnerovu metodu**, ipak je to značajan programerski zalogaj za jedan ovakav program. Možete ga isprobati u klasičnoj konstrukciji parabole. Koristite naredbu **JednadžbaLokusa** [ <lokus1> ].

Najveći broj novih naredbi i poboljšanja u *GeoGebri* 4.2 dano je u statistici, čime *GeoGebra* postaje vrlo ozbiljan program za obradu statističkih podataka i nastavu statistike. O tome u jednom od narednih brojeva Miš-a.