

Mentalni račun...

opet sam u zaostatku! – 2. dio



Antonija Horvatek,
Graberje Ivaničko

U ovom se članku navode tipovi zadataka koje možemo rješavati mentalno, a vezani su uz **prirodne i decimalne brojeve, razmjere i postotke**.

U prošlom je članku bilo riječi o procjeni i mentalnom računu vezanom uz **razlomke**:

- koje sve tipove zadataka (koji se mogu riješiti mentalno) bismo s učenicima trebali rješavati
- na koji bismo ih način trebali uklopiti u nastavu – *miksajući* brojčane i tekstualne životne zadatke, a ujedno i one s mentalnim i one s pisanim računom (s tim da u zadacima, koji se ne mogu riješiti mentalno, radimo i procjenu)
- ukazala sam na to da je loše što nam takvi zadatci nedostaju u udžbenicima jer izostajanje zadataka iz udžbenika za posljedicu ima nedostatak takvih zadataka u nastavi većine učitelja (pogotovo kod učitelja početnika), a drugi veliki problem je što učitelji koji žele raditi takve zadatke moraju **jako puno vremena** potrošiti na osmišljavanje takve nastave, testiranje u nastavi (svaki učitelj sam za sebe otkriva put) i smišljanje zadataka za zadaću
- najveći problem je **nedostatak vremena** da se sve kvalitetno odradi. Dakle, čak i ako učitelj ima želju te uloži veliki napor da osmisli takvu nastavu, neće stići **kvalitetno** odraditi sve ostalo što je predviđeno programom (ili kurikulumom) – **problem nedostatka vremena je nešto što učitelj sâm jednostavno ne može riješiti**.

U ovom ću članku nabrojiti tipove zadataka koje možemo rješavati mentalno, a vezani su uz prirodne i decimalne brojeve, razmjere i postotke. Njima također nije posvećena dovoljna pažnja u našim udžbenicima. I ponovno, ako ih učitelj pokuša u nastavi odraditi kvalitetno, nestane mu vremena za kvalitetnu obradu ostalih predviđenih sadržaja. Mislim da je dobro objaviti te tipove zadataka jer mi je za neke od njih trebalo puno vremena (puno godina rada) da ih uočim i sistematično *posložim*, a niti u jednom članku, predavanju i slično nisam naišla da je netko od metodičara ili učitelja to metodički obradio/iznio. Ovo je, čini mi se, jedan od prvih pokušaja u tom smjeru.

Prirodni brojevi

Budući da učenici u razrednoj nastavi uče brojeve do milijun, neki od mentalnih računa koje ću navesti, mogu se savladati već tada. Moje dosadašnje iskustvo pokazuje da to baš nije slučaj; učenici po dolasku u 5. razred loše vladaju mentalnim računom. Drugi bi se tipovi zadataka (koje ću navesti) trebali savladati na početku petog razreda, nakon upoznavanja brojeva većih od milijun i na-

kon množenja i dijeljenja većih brojeva (s kakvima se nije računalo u razrednoj nastavi). Radi se o sljedećim tipovima računa:

- $12\ 300 + 450$, $12\ 300 + 8100$, $8600 + 253 \dots$ (zbrajanje velikih brojeva s kojima je moguć mentalni račun; barem jedan broj je višekratnik neke dekadске jedinice)
- $78\ 600 - 3200$, $8000 - 450 \dots$ (oduzimanje velikih brojeva s kojima je moguć mentalni račun)
- $8 \cdot 5000$, $200 \cdot 3000$, $500 \cdot 400$, $23\ 000 \cdot 40 \dots$ (množenje velikih brojeva s kojima je moguć mentalni račun; barem jedan faktor je višekratnik neke dekadске jedinice)
- $4 \cdot 121$, $3 \cdot 132$, $2 \cdot 42 \dots$ (nema prijelaza preko desetice ako krenemo množiti pisanim putem; sve se znamenke rješenja odmah vide, možemo na brzinu množiti s lijeve na desnu stranu)
- $3 \cdot 24$, $5 \cdot 107 \dots$ (množenje jednoznamenkastog broja višeznamenkastim; koristiti distributivnost množenja prema zbrajanju)
- $7 \cdot 99$, $8 \cdot 999 \dots$ (koristiti distributivnost množenja prema **oduzimanju**)
- $6 \cdot 11$, $8 \cdot 111$, $9 \cdot 1111 \dots$ (množenje jednoznamenkastog broja sa 11, 111, 1111... – ovi zadatci spadaju u gore navedene, no posebno ih ističem jer, iako su trivijalni, zapanjujuće veliki broj učenika na njima zapinje)
- $60 : 2$, $90 : 2$, $72 : 2$, $400 : 2$, $5000 : 2$, $8400 : 2$, $9200 : 2 \dots$ (dijeljenje sa 2; prepoloviti broj – mnogim učenicima jako teško!)
- $3200 : 8$, $40\ 000 : 5$, $720 : 9 \dots$ (kod dijeljenja koristimo račun iz obične tablice dijeljenja i zatim dopišemo odgovarajući broj nula)
- $6000 : 20$, $120\ 000 : 400 \dots$ (dijeljenje velikih brojeva; i djeljnik i djeljitelj su višekratnici dekadskih jedinica; prije dijeljenja oba broja podijeliti s odgovarajućom dekadskom jedinicom, "pokratiti nule")
- $90 : 45$, $700 : 350$, $105 : 35 \dots$ (dijeljenje kad se do rezultata lako dolazi mentalno ako se upitamo koliko puta djeljitelj ide u djeljnik, a rezultat je mali pa se lako procijeni; rezultat je jednoznamenkast)

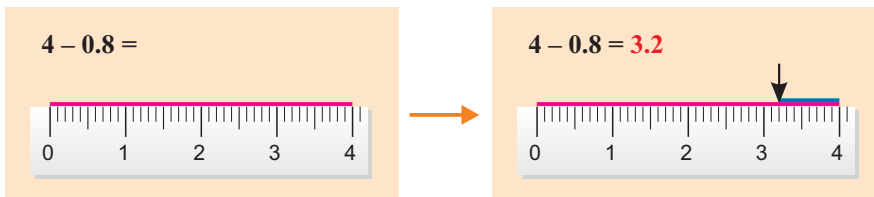
- $4350 : 435$, $7200 : 72 \dots$ (dijeljenje kad je količnik 10, 100, 1000...),
- $468 : 2$, $9603 : 3$, $8848 : 4 \dots$ (dijeljenje kad je svaka znamenka djeljnika djeljiva djeljiteljem; mogućnost da se ovako računa skoro nijedan učenik ne uočava i ne zna koristiti)
- $88 : 8$, $88 : 11$, $9999 : 9$, $9999 : 1111 \dots$ (dijeljenje u kojem je djeljitelj ili količnik jednak 11, 111, 1111...).

Decimalni brojevi

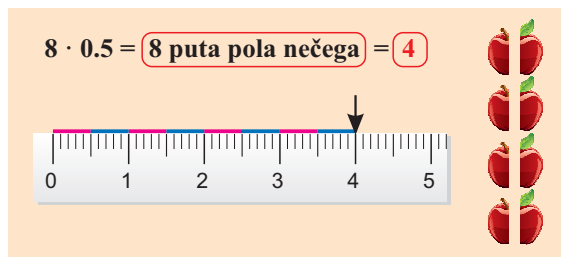
S učenicima bi trebalo uvježbati mentalni račun u sljedećim tipovima zadataka:

- $4.51 + 2$, $4.51 + 0.2$, $4.51 + 0.02$, $4.51 + 0.002 \dots$ (u jednom pribrojniku sve znamenke osim jedne su nule, te treba paziti kojoj znamenici iz drugog pribrojnika tu dodajemo; bez prijelaza preko desetice)
- $7.5 + 1.2$, $3.4 + 2.7$, $3.4 + 0.6$, $8 + 1.3 \dots$ (u oba pribrojnika je najviše jedna decimala; zbrajanje bez i sa prijelazom preko desetice; praktično zamišljati na ravnanu)
- $4.13 + 2.74$, $8.54 + 0.06$, $6.32 + 4$, $5.99 + 0.22 \dots$ (u pribrojnicima su ili nijedna ili dvije decimale; praktično zamišljati u kunama)
- $8 + 24.128$, $54.13 + 200 \dots$ (zbrajanje prirodnog i decimalnog broja)
- $6.38 - 3$, $6.38 - 0.3$, $6.38 - 0.03 \dots$ (u umanjitelju sve znamenke osim jedne su nule, treba paziti od koje znamenke iz umanjjenika oduzimamo; bez prijelaza preko desetice)
- $7.5 - 1.2$, $3.4 - 2.7$, $3.4 - 0.4$, $6.2 - 6$, $5 - 0.4 \dots$ (najviše jedna decimala; opet praktično zamišljati na ravnanu)
- $65.234 - 10$, $412.3 - 12 \dots$ (decimalni broj minus prirodni)
- $1 - 0.1$, $1 - 0.01$, $1 - 0.001$, $3 - 0.0001 \dots$ (prvi zadatak možemo zamisliti na ravnanu, drugi s kunama, a u trećem uočavamo da je umanjitelj **jedna tisućinka**, što znači da od jednog cijelog tj. od **tisuću tisućinki** oduzimamo **jednu**; koliko ih ostane? ... Možemo li slično razmišljati i u prva dva zadatka?...)

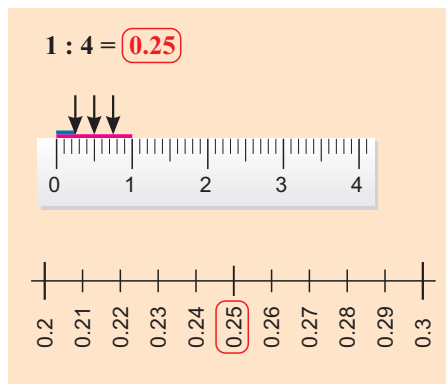
- $3 \cdot 2.102 \dots$ (nema prijelaza preko desetice ako krenemo množiti pisanim putem; sve se znamenke rješenja odmah vide, možemo na brzinu množiti s lijeve na desnu stranu)
- $2 \cdot 3.9$, $2 \cdot 10.6 \dots$ (množenje sa 2, drugi faktor ne treba previše zakomplicirati)
- $0.5 \cdot 24$, $1.5 \cdot 7$ (množenje prirodnog broja sa 0.5, 1.5, 2.5, 3.5...; ako 4 i pol puta uzmemo broj 6, koliko je to?)
- $3 \cdot 2.7 \dots$ (množenje jednoznamenkastog prirodnog broja s decimalnim koji ima jednu decimalu, korištenje distributivnosti, računamo $3 \cdot 2$ i $3 \cdot 0.7$ te zbrojimo)
- $0.3 \cdot 100$, $4 \cdot 1000 \dots$ (množenje dekadskom jedinicom također ubacivati među ostale zadatke; učenici stalno zaboravljaju kako ovdje postupiti)
- $3 : 2$, $5 : 2$, $11 : 2$, $55 : 2 \dots$ (dijeljenje neparnog broja sa 2, prepoloviti broj)
- $48.04 : 4 \dots$ (dijeljenje kad je svaka znamenka djeljenika djeljiva djeliteljem)



Slika 1.



Slika 2.



Slika 3.

- $8.8 : 2.2$, $8.8 : 2 \dots$ (kako razmišljamo u kojem od ovih zadataka; u prvom se pitamo koliko puta 2.2 ide u 8.8, a u drugom pokušavamo prepoloviti 8.8 ili dijelimo svaku znamenku sa 2)

- $5 : 2.5$, $10 : 2.5$, $4.5 : 1.5$, $6.06 : 2.02 \dots$ (dijeljenje kad se do rezultata lako dolazi ako se upitamo koliko puta djelitelj ide u djeljenik; a rezultat je mali jednoznamenkasti broj pa se lako procijeni)
- $6.8 : 100$, $5 : 10 \dots$ (dijeljenje dekadskim jedinicama)
- $2.3 : 2.3$, $2.3 : 1$, $0 : 2.3$, $2.3 : 0 \dots$

I ovdje bi trebalo postići da se učenici dobro snalaze u životnim zadacima u kojima se izmjenjuju mentalni i pisani račun, te da tamo gdje se ne može računati mentalno, rade procjenu. Za vizualizaciju toga što se događa u nekim mentalnim računima, opet je praktično koristiti se *Power Point* prezentacijom u kojoj, u skladu s koracima u razmišljanju, osmišljamo slajdove (slika 1, 2, 3).

Razmjeri

U našim se udžbenicima rješavanje razmjera uglavnom svodi na korištenje svojstva da je umnožak vanjskih članova jednak umnošku unutarnjih. Međutim, među razmjerima postoje (najmanje) dva tipa zadataka koji se mogu rješavati mentalno, ako su brojevi pogodni i ako znamo potrebna svojstva razmjera. Naravno, osim računskih, u nastavu treba ubaciti i životne zadatke u kojima se pojavljuju takvi računi. Radi se o sljedećim tipovima računskih zadataka:

1) Primjer: $4 : 9 = 8 : \square$.

Uspoređujući brojeve 4 i 8, dolazimo do zaključka da ovdje možemo iskoristiti svojstvo da se omjer ne mijenja ako oba člana omjera pomnožimo/podijelimo istim brojem. Drugim riječima, ovdje se koristimo skraćivanjem ili proširivanjem omjera, što podsjeća na skraćivanje i proširivanje razlomaka. U gornjem zadatku uočavamo da broj 4 moramo pomnožiti sa 2 da dobijemo 8, pa ćemo i 9 pomnožiti sa 2...

Naravno, pritom ne mora biti nepoznat baš četvrti član razmjera, već bilo koji, npr. $15 : 10 = \square : 5$, $3 : \square = 30 : 27$.

U gornjim se primjerima proširuje ili skraćuje s cijelim brojem, no nakon što se to svlada, ja za učenike koji žele više volim ubaciti i primjere u kojima proširujemo sa 1.5, 2.5, 3.5, $1\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{3}$ i $2\frac{1}{3}$, tj. ovo gradivo koristim da se takav račun dodatno usavrši. Npr. u zadatku $8 : 9 = 20 : \square$ uspoređujemo brojeve 8 i 20 i pitamo se koliko puta broj 8 ide u 20. Uočavamo da on u 20 stane 2 puta, a nakon što ga uzmemo 2 puta, do 20 nedostaje još 4, tj. vrijedi $8 + 8 + 4 = 20$. Sad se pitamo što je broj 4 broju 8, on je njegova polovina, dakle 8 u 20 ide dva i pol, tj. 2.5 puta. Onda i broj 9 uzimamo 2.5 puta...

2) Primjeri: $6 : 3 = 8 : \square$, $6 : 3 = \square : 8$, $6 : 24 = 20 : \square$.

Ovdje ćemo uočiti da se iz omjera na lijevoj strani lako da iščitati koliko je puta prvi član veći/manji od drugoga, pa isti taj odnos mo-

ra vrijediti i za članove desnog omjera. Odatle zaključujemo kolika je vrijednost nepoznatog člana. Ili, možemo uočiti da je u prva dva primjera praktično znak ":" protumačiti kao dijeljenje te izračunati količnik na lijevoj strani, zaključiti da isti količnik mora biti na desnoj, te tako pronaći nepoznati član. U trećem primjeru, ako na lijevoj strani podijelimo zdesna nalijevo, onda i na desnoj strani treba tako dijeliti, a rezultat mora biti isti, te iz takvog "čudnog dijeljenja" možemo doći do rješenja... Dobro je s učenicima komentirati sve navedene načine razmišljanja i uočavati vode li svi do istog rješenja.

Napomena: Postoje zadatci koji spadaju u oba navedena tipa (navedena pod 1. i 2.), npr. $8 : 2 = 4 : \square$. Naime, ovdje se broj 8 lako može usporediti i sa 2 i sa 4... Takve zadatke također treba zadavati, isticati da se mogu riješiti na više načina i komentirati vode li svi načini do istog rješenja.

Kad se nauči **pisani** postupak rješavanja razmjera, među takve zadatke opet svaki čas treba ubacivati one koji se mogu riješiti **mentalno** i komentirati... Ujedno i među životne tekstualne zadatke ubacivati one koji se mogu riješiti mentalno; postići da učenici mentalni račun rade kad god se on može primijeniti, a ako se ne može, onda da rade procjenu i usporede rezultat (dobiven pisanim računom) s procjenom.

Postotci

U vezi postotaka imamo dva osnovna tipa zadataka koji se mogu rješavati mentalno, a svaki od njih ima tri podtipa. Osnovni tipovi su:

- 1) zadatci u kojima je postotak višekratnik ili djelitelj broja 100 (npr. 100, 50, 20, 25, 10, 1, 200, 300... posto). Ako učenici znaju računati s njima, oni vještiji će nakon toga znati i sa 150, 250, 33, 66, 40, 60... posto, iako ti ne spadaju u djelitelje i višekratnike broja 100.
- 2) zadatci u kojima je osnovna vrijednost višekratnik ili djelitelj broja 100 (npr. 37 % od 200 je \square).

Kad s učenicima završim tu cjelinu, rezultati su jako dobri, ne samo kod zainteresiranijih, već kod **većine** učenika. Zaista dobro vladaju i mentalnim i pisanim računom. Nažalost, kad se vremenski odmaknemo od ove cjeline, npr. kad dođemo do kraja školske godine, rezultati su drastično lošiji. Nedostatak ponavljanja i ponovnog vraćanja na razmišljanja kakva smo ovdje uvježbali, učine svoje. Naravno da time nisam zadovoljna. No, kako uz ovolik broj sati koji sam "otrgnula" za postotke, otrgnuti još i za dodatna ponavljanja...? Ovdje opet dolazi do izražaja **veliki problem nedostatka vremena** koji nas u nastavi stalno prati i **loši rezultati koje takva nastava daje**. Dakle, čak i ako (neke) cjeline kvalitetno odradimo, ali kasnije ne ponavljamo dovoljno (ne zato što učitelj ne vidi da bi trebalo, već zato što nema dovoljno vremena na raspolaganju), smanjit će se kvaliteta postignutog u dobro odradenim cjelinama i rezultati nastave opet neće biti zadovoljavajući. S jedne strane nas se poziva da radimo bolje i kvalitetnije, a s druge strane nam nisu omogućeni osnovni uvjeti za to – vrijeme. Taj nedostatak nitko od nas ne može riješiti sam.

Cik-cak ponavljanje

U svrhu boljeg ovladavanja nekim gradivom, boljeg povezivanja, uvježbavanja prelaska s jednog načina razmišljanja na drugi i boljeg pamćenja, bilo bi dobro u nastavu uvesti i što više "cik-cak ponavljanja". Pod tim nazivom mislim na ponavljanje

koje radimo nekoliko sati **na prijelazu između dviju cjelina**, a kroz koje ponavljamo gradivo od **nekoliko prošlih cjelina** (kojima se neko vrijeme nismo koristili), možda i iz **prijašnjih razreda, sistematiziramo, prisjećamo se** onoga što smo zaboravili, postizemo jasniji "**pogled odozgo**", uvježbavamo **prelaženje** s jednog tipa zadatka na drugi tj. s jednog načina razmišljanja na drugi... Trenutačno u školama baš i nemamo praksu raditi takva ponavljanja. Nije ni čudo s obzirom na **nedostatak vremena**. Ja sam u nekoliko navrata to pokušala i učenicima se jako svidjelo. Mana je što se za vrijeme jednog sata ne stigne riješiti puno zadataka jer, budući da se dosta toga zaboravljenog prisjećamo, a ne želim im sve "dati na tacni", kroz raspravu lutamo u prisjećanju, komentiramo zašto neki način razmišljanja nije dobar, na koje se još načine može... A kad god se kreće u rasprave, na njih odlazi jako puno vremena, a da pritom zapravo ne riješimo osjetan broj zadataka. Ne postigne se oipljivi osjećaj da se nešto konkretno napravilo.

Na *web*-stranicama *Matematika na dlanu* možete naći moje godišnje planove u koje su ukomponirani mentalni račun i procjena. Doduše, realizacija mojih satova nikad nije u skladu s planom, uvijek kasnim jer ne marim puno za mrtva slova na papiru, a marim za potrebe djece pred sobom. Na istim stranicama možete naći i mnoge materijale koje sam spominjala u ovom i prethodnom članku: Power Point prezentacije, zadatke za zadaću u Wordu...

Božićni rebus

Zamijeni znak odgovarajućom znamenkom tako da račun bude točan.

$$\begin{array}{r}
 \star \cdot \text{🍎} = \text{🍎} \text{🍎} \text{🍎} \\
 \star + \text{🍎} \text{🍎} = \text{🍎} \text{🍎} \text{🍎} \\
 \star - \text{🍎} \text{🍎} = \text{🍎} \text{🍎} \text{🍎} \\
 \hline
 \star \star \text{🍎} + \star \text{🍎} \text{🍎} = \text{🍎} \text{🍎} \text{🍎} \text{🍎} \text{🍎}
 \end{array}$$

Rješenje: $10 \cdot 54 = 540$, $104 - 102 = 2$, $114 + 156 = 270$.