

Preslikavanja ravnine i GSP



Lidija Kralj, Veliki Bukovec i Šime Šuljić, Pazin

O jednoj obradi nastavne cjeline “Preslikavanje ravnine” kao mogućem uzoru

Šime Šuljić

*“The best way to learn is to do — to ask, and to do.
The best way to teach is to make students ask, and do.
Don't preach facts — stimulate acts.”*

*“Najbolji način učenja je naučiti pitati i potom djelovati.
Najbolji način poučavanja je potaknuti učenike da pitaju i potom djeluju.
Nemoj gomilati činjenice, nego potiči djelovanje.”*

Paul Halmos

Kada bismo pri poučavanju matematike stalno bili svjesni ove divne misli američkog matematičara rođenog u Budimpešti 1916. godine, naša bi nastava zasigurno bila puno kvalitetnija. Naravno da nije dovoljno pročitati dobru misao pa da se ona odmah osjeti u našem poslu. Potrebno je puno napora i volje da pomalo mijenjamo našu svakodnevnu radnu rutinu. Međutim, kada uvodimo kakvu novinu u nastavu, onda je to možda pravi trenutak da je uvedemo na dobrim osnovama. Danas više–manje svi koristimo ili planiramo koristiti računalo u nastavi i zasigurno treba razmisliti trebaju li nam multimedijalni efekti samo da bismo i dalje “nizali činjenice” ili trebamo dati priliku učenicima da, u duhu Halmosove izreke, istražuju, pitaju i zaključuju.

Unazad nekoliko godina, zahvaljujući prije svega naporima koje čini *Hrvatsko matematičko društvo*, s programom *The Geometer's Sketchpad* upoznao se velik broj nastavnika. Mnogi ostanu impresionirani mogućnostima i dosezima tog naoko malog “programčića” koji zadire u “više sfere” analize, nacrtna, fraktalna i neeuclidiska geometrije. Pod tim dojmom često si postavljamo pitanje gdje i kako ga iskoristiti u redovnoj nastavi matematike, poglavito onoj osnovnoškolskoj. S druge strane, *Sketchpad* je vrlo intuitivan i jednostavan alat, čija moć itekako može doći do izražaja u otkrivanju osnovnih matematičkih činjenica. Umjesto nekog recepta kako ga i gdje primijeniti, čini mi se korisnijim istaknuti jedan primjer iz nastavne prakse. Način na koji je kolegica Lidija

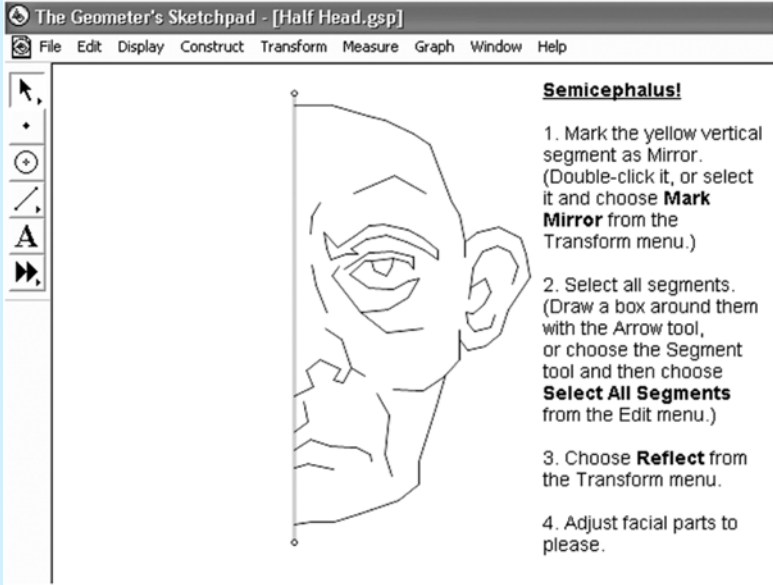
Kralj obradila cjelinu *Preslikavanje ravnine* svakako zaslužuje prostor u ovom časopisu kao ogledni primjer dobrog korištenja tehnologije.

Osnovna ideja bila je da će učenici sami otkriti svojstva osne i centralne simetrije, translacije i rotacije u dinamičnom okruženju računalnog zaslona, kroz niz vođenih koraka. Učenici ne kreću od nečeg već napravljenog u programu, nego od potpuno praznog "sketcha". Primjera radi, učenik sam zada je os simetrije i crta objekt koji će preslikati programskom naredbom. Pretpostavka da za to nije potrebno neko posebno upoznavanje s programom pokazala se potpuno ispravnom. Konstrukcijski koraci su toliko jednostavni i jako ih je malo, da čak ne postoji neka potreba da se uradci učenika sprema, jer je uvijek moguće sve iznova brzo konstruirati. Ovdje me uporaba računala modelom crtaj–briši neodoljivo podsjeća na male učeničke pločice po kojima se prije ere bilježnica pisalo

kredom i brisalo krpicom. Nije to bilo tako davno i možda će se tkogod od starijih čitatelja prisjetiti svojih školskih početaka. Unatoč stalnom brisanju, tadašnji učenici su gotovo sve naučili na taj način. Ipak, kao što ćete vidjeti iz opisa sata, učenici su važne zaključke zapisivali u bilježnicu.

Naravno da radna površina softvera dinamične geometrije zbog svoje vizualizacije i mogućnosti pomicanja i mijenjanja objekata ima velike prednosti pred bilo kojom statičnom slikom. Ovdje se već u startu:

- budi znatiželja i pojačava interes;
- postiže učinak da je svaki učenik aktivan, a ne pasivan sudionik nastavnog procesa;
- učenik je samostalan u opažanju, istraživanju i zaključivanju (individualizacija nastave);
- dinamičnom se predodžbom dolazi do boljeg i bržeg razumijevanja;
- učenici lako mogu ispitati svoje slutnje;
- učenici lakše formuliraju svoje zaključke;



The Geometer's Sketchpad - [Half Head.gsp]

File Edit Display Construct Transform Measure Graph Window Help

Semicephalus!

1. Mark the yellow vertical segment as Mirror. (Double-click it, or select it and choose **Mark Mirror** from the Transform menu.)
2. Select all segments. (Draw a box around them with the Arrow tool, or choose the Segment tool and then choose **Select All Segments** from the Edit menu.)
3. Choose **Reflect** from the Transform menu.
4. Adjust facial parts to please.

Ako je na ovaj način matematika zabavnija, ne treba zaboraviti da može biti još zabavnija. U direktoriju C:\Program Files\Sketchpad\Samples\Sketches\Fun naći ćemo gotov primjer *Half Haed.gsp* (vidi sliku), koji učenike može dobro zabaviti.

— ostvaruje se prelazak s predavačke nastave na nastavu problemskog tipa;

— učenike se uči učiti.

Ovako zamišljena nastava izvodi se u tri- ma fazama:

- 1) samostalan rad i istraživanje,
- 2) rasprava o idejama i slutnjama u paru ili grupi, ako je za računalom više učenika;
- 3) iznošenje zaključaka za cijeli razred zajedno s nastavnikom.

Kada pročitate opis izvedbe sata može vam se činiti da je računalo ovdje korišteno na vrlo jednostavan način. Tome i jest tako, ali upravo taj jednostavan način vrlo je učinkovit!

Otkrivanje preslikavanja ravnine uz pomoć “The Geometer’s Sketchpada”

Lidija Kralj

Preslikavanja ravnine uče se u matemati- ci u osmom razredu i obuhvaćaju translaciju, osnu simetriju, rotaciju i centralnu simetriju. Crtanje bilo kojeg preslikavanja na papiru tra- ži strpljenje i mirnu ruku. Prije nego počnete crtati rukom po papiru pokušajte mišem po Sketchpadu, sigurno će vam se svidjeti. I što je još bolje — nacrtane slike mijenjat će se kako mijenjate položaj točaka ili dužina, tako da ste zapravo umjesto jedne nacrtali beskonačno mnogo slika koje su idealne za eksperimentiranje. Tako sam ja ove godine odlučila početi na drugačiji način. Prvo ćemo dva sata provesti u informatičkoj učionici ig- rajajući se GSP-om i otkrivajući preslikavanja ravnine, a onda ćemo se vratiti u matematičku učionicu i nastaviti s crtanjem po papiru.

Tehnički uvjeti

Eksperimentiranje se održavalo u infor- matičkoj učionici OŠ Veliki Bukovec. Učio- nica ima 15 prosječnih (pomalo zastarjelih) računala i projektor. Učenici osmih razreda

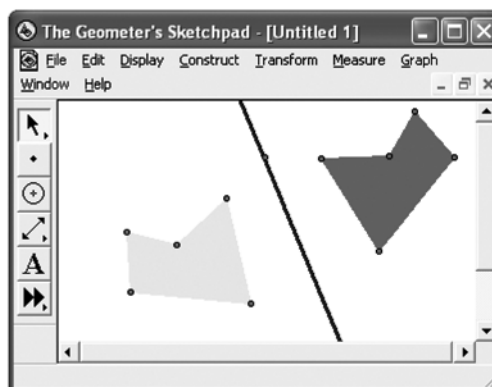
imaju izbornu nastavu informatike već četvr- tu godinu, no sa GSP-om nisu imali nikakvih iskustava. Nastava matematike u informati- čkoj učionici za njih je čest i uobičajen oblik poučavanja. U jednom je razredu 20, a u drugom 25 učenika.

Kako smo radili

Počeli smo s osnom simetrijom jer su nju već prije učili, a i često je susreću u sva- kodnevnom životu. Konstrukciju smo radili zajednički, ja sam im davala upute što treba- ju raditi i istovremeno pokazivala preko pro- jektora. Naravno, uz povremeno asistiranje onima koji su se izgubili.

Koraci u konstrukciji **osne simetrije**:

1. Nacrtajte nekoliko točaka te ih sve ozna- čite.
2. Odaberite *Construct > Polygon interior* da biste konstruirali obojeni mnogokut.
3. Nacrtajte jedan pravac i označite ga.
4. Odaberite *Transform > Mark Mirror* da biste taj pravac označili kao os simetrije.
5. Označite mnogokut te odaberite *Trans- form > Reflect* i nacrtat će se osnosime- trična slika početnog mnogokuta.
6. Odabirom *Display > Color* promijenite boju novog mnogokuta.



Slika 1. Mnogokut preslikan osnom simetrijom

Analiza:

1. Mišem povlačite točke mnogokuta i pravca. Mijenjajte položaj cijelog mnogoku- ta. Pratite što se događa s dužinama, mnogo- kutom i pravcem.

2. Razgovor o osnoj simetriji (popraćeno pokazivanjem na gotovoj slici).

Čime je zadana osna simetrija?

Kakve su duljine dužina prvog i drugog mnogokuta?

Kakva je udaljenost vrhova mnogokuta od pravca? Ako je vrh bliži pravcu, gdje je njegova slika?

Kada se neki vrh prvog mnogokuta poklopi s vrhom drugog mnogokuta?

Kada se likovi potpuno poklope?

Učenici zapisuju zaključke u bilježnicu.

Priprema za crtanje na papiru:

1. Konstruiranje dužina koje spajaju parove odgovarajućih točaka.

2. Proučavanje u kakvom su položaju te nove dužine prema pravcu te kakva je udaljenost od vrha jednog pa drugog mnogokuta do pravca.

3. Ponavljanje — kako ćemo sve to nacrtati na papiru.

Učenici nisu crtali u bilježnicu. Crtat će kad se vratimo u matematičku učionicu.

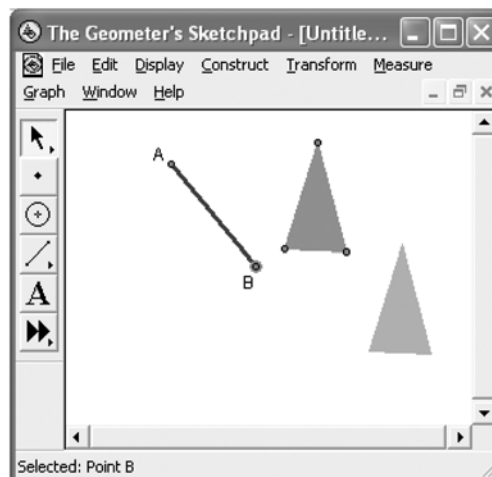
* * *

Koraci u konstrukciji **translacije**:

1. Nacrtajte dvije točke, označite ih te odaberite *Construct > Segment*.
2. Imenujte točke upotrebom alata *Text Tool*.
3. Označite prvu točku te dužine, pa zatim drugu.
4. Odaberite *Transform > Mark Vector* da biste tu dužinu označili kao vektor.
5. Nacrtajte neki lik (ili kako učenici kažu — istočkajte lik).
6. Označite lik te odaberite *Transform > Translate*.
7. U prozoru koji se otvori odaberite *Marked*, kliknite na OK i dobili ste translirani lik.
8. Promijenite boju novog lika.

Analiza:

1. Mišem povlačite točke lika i vektora. Mijenjajte položaj cijelog lika. Pratite što se događa s dužinama, likom i vektorom.



Slika 2. Trokut translirani za vektor \vec{AB}

2. Razgovor o translaciji (popraćeno pokazivanjem na gotovoj slici).

Čime je zadana translacija?

Kakve su duljine dužina prvog i drugog lika? Kakva je udaljenost vrhova prvog lika od vrhova drugog lika? Kako se ta udaljenost mijenja ako duljinu vektora povećamo ili smanjimo?

Kada se prvi i drugi lik potpuno poklope?

Učenici zaključke zapisuju u bilježnicu.

Priprema za crtanje na papiru:

1. Konstruiranje dužina koje spajaju parove odgovarajućih točaka.

2. Proučavanje u kakvom su položaju te nove dužine prema vektoru te kakva je udaljenost od vrha jednog do odgovarajućeg vrha drugog lika.

3. Ponavljanje — kako ćemo sve to nacrtati na papiru.

* * *

Koraci u konstrukciji **rotacije**:

1. Nacrtajte neki lik.
2. Nacrtajte jednu točku izvan lika i imenujte je i označite.
3. Odaberite *Transform > Mark Center* da biste tu točku označili kao središte rotacije.

- Označite lik te odaberite *Transform > Rotate*.
- U prozoru koji se otvori odaberite *Fixed Angle*, upišite kut -45° , kliknite na OK i dobili ste rotirani lik.
- Promijenite boju novog lika.

Analiza:

1. Mišem povlačite točke lika i središte rotacije. Mijenjajte položaj cijelog lika. Pratite što se događa s dužinama, likom i središtem rotacije.

2. Razgovor o rotaciji (popraćeno pokazivanjem na gotovoj slici).

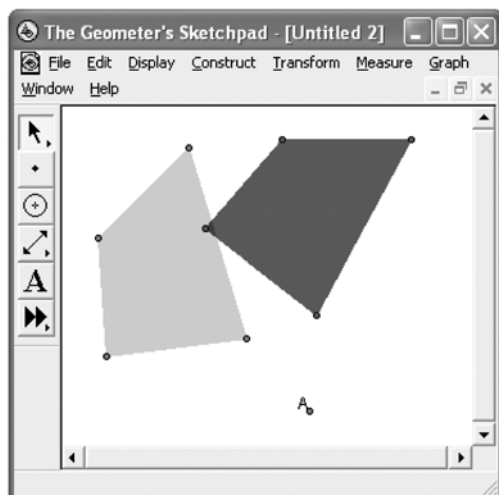
Čime je zadana rotacija?

Kakve su duljine dužina prvog i drugog lika? Ponovimo rotaciju s drugim kutom.

U kojem smjeru ide rotacija ako je kut negativan, a u kojem ako je kut pozitivan?

Za koji se kut prvi i drugi lik potpuno poklope?

Učenici zaključke zapisuju u bilježnicu.



Slika 3. Četverokut rotiran za -45°

Priprema za crtanje na papiru:

- Konstruiranje dužina koje spajaju vrhove lika sa središtem rotacije.
- Bojanje odgovarajućih parova dužina istom bojom.
- Proučavanje u kakvom su položaju ti parovi dužina, tj. kakav je kut između njih.
- Ponavljjanje — kako ćemo sve to nacrtati na papiru.

* * *

Koraci u konstrukciji **centralne simetrije**:

S obzirom da GSP nema definiranu centralnu simetriju kao posebnu transformaciju, mi smo je nacrtali onako kako se radi na papiru.

- Nacrtajte neki lik.
- Nacrtajte jednu točku izvan lika i imenujte je.
- Označite središte i jedan vrh lika.
- Odaberite *Construct > Circle by Center + Point*.
- Dobivenu kružnicu prikazite crtkano (*Display > Line Width > Dashed*).
- Ponovno označite središte i taj vrh te odaberite *Construct > Line*.
- Označite pravac i kružnicu te odaberite *Construct > Intersection*. Time smo nacrtali centralnosimetričnu sliku prve točke. Korake 3.–7. ponovite za sve vrhove zadanog lika.
- Označite redom sve nove točke te odaberite *Construct > Polygon Interior*.
- Promijenite boju novog lika.
- Označite sve kružnice i pravce te odaberite *Display > Hide Path Objects* da biste sakrili dijelove konstrukcije.

Analiza:

1. Mišem povlačite točke lika i središte centralne simetrije. Mijenjajte položaj cijelog lika. Pratite što se događa s dužinama, likom i središtem.

2. Razgovor o centralnoj simetriji (popraćeno pokazivanjem na gotovoj slici).

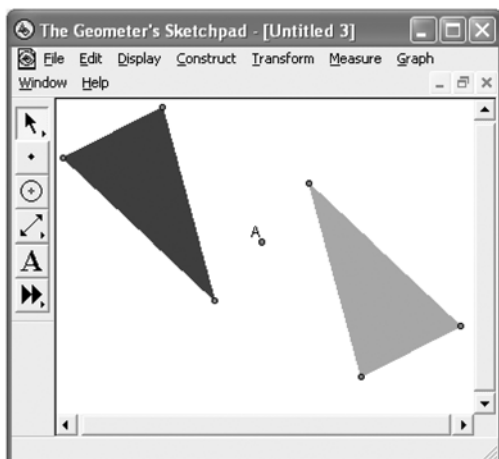
Čime je zadana centralna simetrija?

Kakve su duljine dužina prvog i drugog lika? Kakva je udaljenost vrhova lika od središta? Ako je vrh bliži središtu, gdje je njegova slika?

Kada se neki vrh prvog lika poklopi s vrhom drugog lika?

Kada se likovi potpuno poklope?

Učenici zaključke zapisuju u bilježnicu.



Slika 4. Centralnosimetrična slika trokuta

Priprema za crtanje na papiru:

1. Prikažite skrivene dijelove konstrukcije (*Display > Show All Hidden*).
2. Ponavljanje — na papiru ćemo crtati na isti način kao i u GSP-u.

Prednosti ovakvog pristupa preslikavanjima ravnine

Učenici su naučili koristiti jedan matematički program, *The Geometer's Sketchpad* u istraživačke svrhe. S obzirom na raznolikost dobivenih slika mogli su isprobavati i provjeravati svojstva preslikavanja ravnine na beskonačno mnogo načina. Takav način rada je neizvediv ako crtate na ploči. Na ovaj način učenici imaju kontrolu nad nacrtanim te mogu istraživati na svoj način i svojom brzinom.

Razgovor o preslikavanjima potaknuo je i još jedno pitanje — *Zar duljine dužina ostaju nepromijenjene kod svih preslikavanja?* Tada smo se prisjetili sličnosti i pokazala sam im GSP-ovu funkciju *Dilate*, pri kojoj su stranice novog lika nekoliko puta manje ili veće.

Učenici su kroz igru otkrili puno za malo vremena.

*Koji znakovi su osno simetrični? Koji znakovi imaju više osi simetrije?
Koji znakovi su centralno simetrični? Pronađi im središte simetrije.*

