

Nastava statistike u osnovnoj školi (3)

Lidija Kralj, Veliki Bukovec

U prethodna dva broja *Miš*-a govorili smo o grafičkom prikazivanju podataka. Tema posljednjeg članka o statistici u 7. razredu osnovne škole je **Analiza podataka**. Za ostvarivanje ove teme potrebna su vam 3 – 4 školska sata, ovisno o tome koliko želite učenike naučiti da se za obradu i analizu statističkih podataka koriste računalom.

Primjer 1. *Objekti, obilježja i vrijednosti.*

Pogledaj ovu tablicu i odgovori na pitanja.

Nacionalni park	Površina (ha)
Plitvička jezera	29 482
Paklenica	10 200
Risnjak	6 400
Mljet	5 480
Kornati	23 400
Brijuni	3 635
Krka	10 300
Sjeverni Velebit	10 900

- O čemu govore podaci u tablici?
- Nacrtaj stupčasti grafikon.
- Koji je najveći nacionalni park u Hrvatskoj?
- Koji je najmanji nacionalni park u Hrvatskoj?
- Koja bismo još obilježja mogli prikupiti o nacionalnim parkovima u Hrvatskoj?

Rješenje: Podaci u tablici prikazuju površine nacionalnih parkova u Hrvatskoj. Kažemo da su nacionalni parkovi promatrani **skup objekata** u ovom primjeru. Pritom su površine

zapisane u hektarima ($1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$). Kažemo da je površina **obilježje** koje promatramo u ovom primjeru.

Obilježja mogu biti prikazana brojevima ili nekim drugim nizom vrijednosti. **Brojčana obilježja** su primjerice: površina, visina, ocjena, broj bodova, broj cipela, itd. **Nebrojčana obilježja** su primjerice boja kose, spol, boja cipela, itd. Svako obilježje je određeno skupom vrijednosti koja poprima. **Skup vrijednosti** za obilježje površina, u našem primjeru, su prirodni brojevi. Skup vrijednosti, primjerice, za obilježje boja kose čine vrijednosti: smeđa, crna, crvena i plava.

Metodička napomena: *Primjer 1 je uvodni primjer kojim povezujemo dosad naučeno o grafičkom prikazu s novim pojmovima.*

Primjer 2. *Frekvencija.*

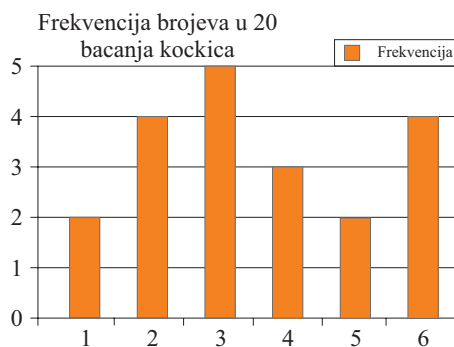
Luka i Maja su za domaću zadaću trebali baciti kockicu 20 puta i bilježiti koji broj je bio na gornjoj strani kockice. Tablica prikazuje njihove rezultate.

Broj na kockici	Broj pojavljivanja
1	2
2	4
3	5
4	3
5	2
6	4

- Je li kockica jednaki broj puta pala na svaku stranu?
- Koliko je puta na gornjoj strani kockice pao broj 3?
- Koliki je ukupan broj pojavljivanja svih brojeva na kockici?
- Nacrtaj stupčasti dijagram za prikupljene podatke.

Rješenje:

- Nije. Neki brojevi su se pojavili više puta, a neki manje.
- Traži se koliko puta se pojavio broj 3 na kockici. Broj pojavljivanja naziva se **frekvencija ili učestalost**. Iz tablice vidimo da frekvencija broja 3 iznosi 5. Tablica u kojoj su zapisane frekvencije, kao u ovom primjeru, često se naziva **frekvencijska tablica**.
- Ukupan broj pojavljivanja, tj. zbroj svih frekvencija jednak je broju bacanja, a to je 20.
- Frekvencija ili učestalost neke vrijednosti je broj koji nam kazuje koliko puta se ta vrijednost pojavila u nekom skupu.



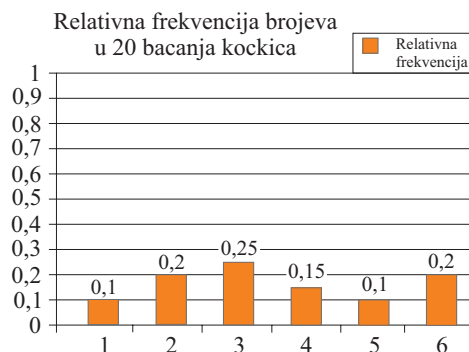
Primjer 3. *Relativna frekvencija.*

Pogledaj tablicu iz Primjera 2. Koliko puta se pojavio broj 3? Koliko je to u odnosu na ukupan broj bacanja? Dobivene podatke prikaži stupčastim dijagramom.

Rješenje: Ukupan broj bacanja kockice je 20. Od toga se broj 3 pojavio 5 puta, dakle, njegova frekvencija je 5. Podijelimo li tu frekvenciju s ukupnim brojem bacanja, tj. 20, dobit ćemo količnik $5 : 20 = 0.25$. Taj broj se naziva **relativna frekvencija**. Relativne frekvencije

računamo tako da svaku frekvenciju podijelimo s ukupnim brojem pojavljivanja. Ukoliko se pri računanju relativne frekvencije pojavljuju beskonačni decimalni brojevi, najčešće rezultate zaokružujemo na dvije decimale.

Broj na kockici	Frekvencija	Relativna frekvencija
1	2	0.1
2	4	0.2
3	5	0.25
4	3	0.15
5	2	0.1
6	4	0.2



Relativne frekvencije računamo tako da svaku frekvenciju podijelimo s ukupnim brojem pojavljivanja u nekom skupu. Zbroj svih relativnih frekvencija nekog skupa mora uvijek biti 1.

Relativna frekvencija je uvijek broj između 0 i 1, pa se često izražava i u obliku postotka. Zapišimo relativne frekvencije iz tablice u obliku postotka:

$$\begin{aligned}
 0.1 &= 10\%, & 0.2 &= 20\%, \\
 0.25 &= 25\%, & 0.15 &= 15\%, \\
 0.1 &= 10\%, & 0.2 &= 20\%.
 \end{aligned}$$

Ukupan zbroj svih postotaka treba biti 100%.

Metodička napomena: *Primjeri s bacanjem kockice upotrijebljeni su za uvođenje novih pojmova: frekvencije i relativne frekvencije.*

Obzirom da ćemo te pojmove koristiti pri uvođenju vjerojatnosti odabrani su baš primjeri s bacanjem kockice. Dobro bi bilo da oba primjera napravite u obliku pokusa tako da svaka grupa učenika baca kockice, bilježi dobivene rezultate, a zatim postepeno popunjava tablice i crta dijagrame. Moguće je upotrijebiti Excel za računanje relativnih frekvencija, prikaz u obliku postotka, te crtanje odgovarajućeg dijagrama.

Zadaci

1. Završne ocjene 7.b razreda, na kraju prvog polugodišta, iz matematike su: 2, 4, 5, 2, 1, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 3, 4, 3, 3, 4, 2, 2, 4, 3, 3, 5, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 2.

- Napravi tablicu frekvencija, pa nacrtaj stupčasti dijagram frekvencija.
- Izračunaj relativne frekvencije i nacrtaj stupčasti dijagram za njih.
- Zapiši relativne frekvencije u obliku postotka.

2. Luka i Matija su dobili zadatak organizirati nabavu cipela za trgovinu s cipelama. Matija je predložio da nabave po jedan par cipela svakog broja. No Luka se s tim nije složio. Lukin argument je bio "Ne prodaju se svi brojevi cipela jednako". Slažeš li se s Lukom ili Matijom?

Koje brojeve cipela bi trebalo nabaviti za učenike tvog razreda? Treba li od svakog broja jedan par ili se neki brojevi cipela češće pojavljuju? Ako da, koji brojevi cipela su najčešći u tvom razredu? Nacrtaj pripadni dijagram relativnih frekvencija.

Primjer 4. Aritmetička sredina.

Luka je u prvom polugodištu dobio ove ocjene iz informatike: 5, 2, 4, 3, 4, 5, 4, 3. Učiteljica ga je zamolila da izračuna aritmetičku sredinu tih ocjena. Možeš li pomoći Luki u računanju?

Rješenje: Maja se dosjetila da je aritmetička sredina isto što i prosjek, a oni su već odavno

naučili računati prosjek ocjena. Dakle, aritmetičku sredinu dobivamo tako da zbrojimo sve brojeve i podijelimo s brojem koliko ih ima.

Aritmetička sredina n brojeva $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ je broj kojeg računamo po formuli

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n}{n}$$

Aritmetičku sredinu označavamo s \bar{x} , a često je nazivamo srednja vrijednost ili prosječna vrijednost.

$$\bar{x} = \frac{5+2+4+3+4+5+4+3}{8} = \frac{30}{8} = 3.75.$$

Ima li Luka koju ocjenu jednaku aritmetičkoj sredini?

Nema. Aritmetička sredina može, ali ne mora biti jednaka niti jednom od zadanih podataka. No aritmetička sredina je uvijek između najmanje i najveće vrijednosti promatranih podataka.

Primjer 5. Poplava.

Prosječan vodostaj rijeke Mure u kolovozu 2005. g. bio je 258 cm. Znajući da stanje izvanredne obrane od poplave nastupa kad vodostaj prijeđe 400 cm, razmisli, je li bilo poplave u dolini rijeke Mure u to vrijeme?

Rješenje: Prosječna vrijednost nas često može navesti na pogrešan zaključak. Gledajući samo prosječnu vrijednost vodostaja Mure mogli bismo zaključiti da je vodostaj bio povišen, ali da nije bilo poplave.

Poplave je ipak bilo jer je 23. kolovoza 2005. g. u 15.00 sati vodostaj Mure bio 506 cm. Taj podatak mi nismo mogli razaznati iz prosječne vrijednosti.

Više o vodostajima rijeka možete saznati na stranicama Hrvatskih voda, <http://www.voda.hr/vodostaj.htm>.

Promatranje kompletnih podataka o primjerice, vodostaju rijeka tijekom nekoliko godina, za svaki sat, svaki dan, svakog mjeseca bilo bi komplicirano. Zato se za sve usporedbe uzimaju prosječne vrijednosti u pojedinim mjesecima ili godinama.

Metodička napomena: *Prosječna vrijednost bi trebao biti termin koji učenici upoznaju ranije, ovdje se samo uvodi matematički termin i odgovarajući zapis. Zadaci s meteorološkim podacima prikladni su za učeničko istraživanje i projekte, pa bi svakako trebalo iskoristiti priliku da se gradivo statistike poveže sa svakodnevnim životom.*

Za rješavanje zadataka na računalu potrebno je, u Excelu, pokazati upotrebu funkcije average.

Zadaci

3. Pogledaj podatke zapisane u tablicama.

Prosječna količina padalina na Palagruži tijekom 2002. godine u mm/m ²					
I	II	III	IV	V	VI
24	20	31	17	12	10
VII	VIII	IX	X	XI	XII
8	8	20	15	30	44

Prosječna količina padalina u Gospiću tijekom 2002. godine u mm/m ²					
I	II	III	IV	V	VI
110	105	100	116	114	95
VII	VIII	IX	X	XI	XII
82	100	118	135	170	140

- Izračunaj prosječnu količinu padalina na Palagruži i u Gospiću.
- Usporedi količine padalina i reci koje mjesto ima više padalina tijekom godine.
- Koje bi mjesto moglo imati problema sa sušom?

4. U sljedećoj tablici nalaze se temperature zraka, izmjerene istoga dana u nekoliko europskih gradova.

- Kolika je prosječna temperatura zraka u Europi tog dana?
- Gdje je najtoplije, a gdje najhladnije?

c) U kojim mjesecima bi mogle biti izmjerene te temperature?

d) Koje bi podatke trebao da možeš reći je li to uobičajena temperatura za taj datum u nekom od gradova?

Grad	Temperatura zraka u °C
Atena	31
Beč	24
Bruxelles	28
Graz	23
London	17
Ljubljana	23
Pariz	20
Rim	29
Zagreb	27

Primjer 6. Grupiranje podataka.

Luka i Maja su izmjerili visine učenika svojeg razreda i dobili ove podatke, u centimetrima: 156, 164, 170, 147, 135, 149, 160, 172, 161, 169, 153, 155, 164, 168, 169, 152, 147, 158, 153, 139.

- Prikaži podatke o visini dijagramom frekvencija.
- Izračunaj relativne frekvencije i nacrtaj dijagram relativnih frekvencija.

Rješenje:

a) Niz podataka o visinama učenika je prevelik da svaki broj posebno zapišemo u tablicu. Uočimo da je frekvencija većine brojeva 1. Da bismo pojednostavili prikaz, podatke ćemo razvrstati u nekoliko grupa. Kažemo da podatke grupiramo u **razrede**.

Najmanja vrijednost koja se pojavljuje u ovom skupu podataka je 135 cm, a najveća 172 cm. Za grupiranje podataka u razrede prikladno je

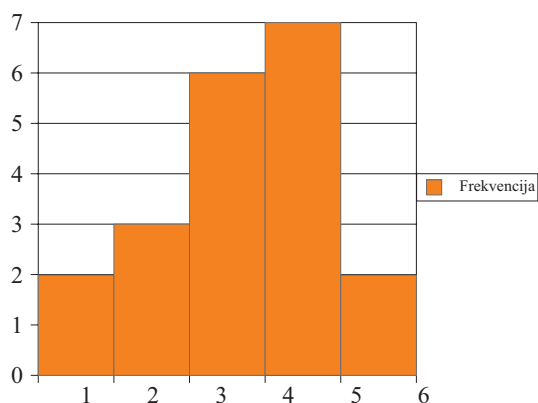
odrediti pet do deset razreda. Razrede možemo odabrati tako da pojedini podatak stavljamo samo u jedan razred i da raspon podataka u svim razredima bude jednak. Za prikaz podataka o visinama odabrat ćemo ove razrede:

Razred
130 – 139
140 – 149
150 – 159
160 – 169
170 – 179

Prebrojimo koliko podataka ima u pojedinom razredu. Najjednostavnije je da čitamo podatke redom i crticama bilježimo koji podatak pripada kojem razredu.

Razred	Frekvencija
130 – 139	= 2
140 – 149	= 3
150 – 159	= 6
160 – 169	= 7
170 – 179	= 2

Frekvencija visina po razredima

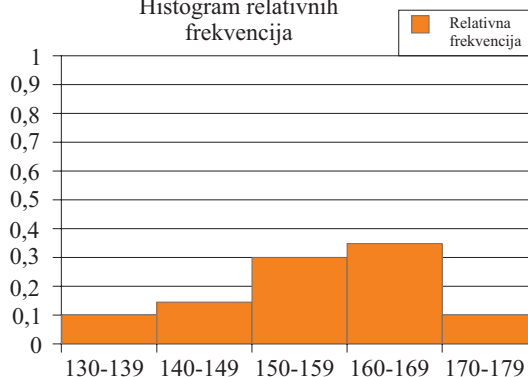


Sada je jednostavno nacrtati dijagram frekvencija. Stupčasti dijagram koji smo nacrtali u ovom primjeru naziva se **histogram**. Na osi apscisa histogram ima prikazane razrede, a ne pojedinačne vrijednosti.

b) Relativne frekvencije računamo tako da svaku frekvenciju podijelimo s ukupnim brojem pojavljivanja. Dakle, u našem primjeru moramo svaku frekvenciju podijeliti s 20 jer imamo ukupno 20 podataka o visinama.

Razred	Frekvencija	Relativna frekvencija
130 – 139	2	0.1
140 – 149	3	0.15
150 – 159	6	0.3
160 – 169	7	0.35
170 – 179	2	0.1

Histogram relativnih frekvencija



Metodička napomena: *Primjer 6 može se odraditi i stvarnim mjerenjem i prikupljanjem podataka za neki razred. Na taj će način učenici bolje shvatiti upotrebu statistike u svakodnevnom životu. Za crtanje histograma može se upotrijebiti Excel.*

Zadaci

5. 6. razred ima 30 učenika, a na ispitu znanja postigli su ove bodove: 11, 10, 0, 2, 27, 26, 24, 26, 12, 13, 14, 11, 2, 27, 25, 18, 17, 16, 20, 14, 27, 26, 20, 19, 18, 19, 15, 13, 20, 20.

- Razvrstaj podatke u prikladne razrede, a zatim nacrtaj histograme frekvencija i relativnih frekvencija.
- Izračunaj aritmetičku sredinu tih podataka.
- Pokušaj napraviti skalu ocjena ako je najveći broj bodova 27;
- Izračunaj postotak riješenosti ispita.

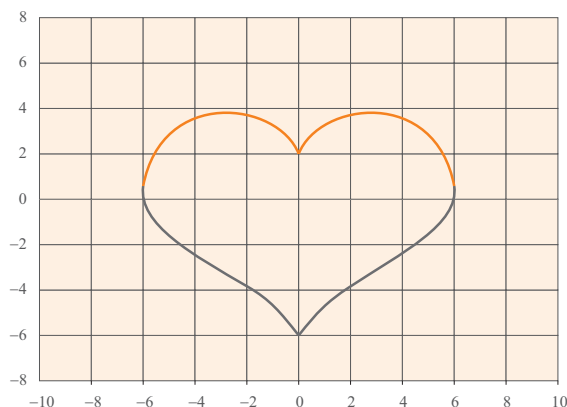
6. U tablici desno prikazani su podaci o broju stanovnika nekih gradova.

- Razvrstaj podatke u prikladne razrede, a zatim nacrtaj histograme frekvencija i relativnih frekvencija.
- Koliko stanovnika ima Zagreb? U koji razred bismo ga smjestili?
- Što misliš koji od spomenutih gradova ima najveću površinu? Zašto?
- Pronađi te gradove na zemljopisnoj karti i istraži koji od njih ima najveću površinu.

Metodička napomena: Slijedi ponavljanje i povezivanje naučenog gradiva kroz diferenciranu nastavu, rad na projektu, timske aktivnosti, terensku nastavu ili neku drugu aktivnost koja odgovara vašim učenicima.

grad	broj stanovnika
Moskva	13 100 000
Pariz	9 800 000
London	6 500 000
Tokio	27 000 000
Osaka	16 450 000
Seul	15 900 000
Kalkuta	11 100 000
Džakarta	10 000 000
Sydney	3 600 000
Melbourne	3 000 000
New York	18 100 000
Mexico City	16 000 000
Los Angeles	14 500 000
Sao Paulo	15 175 000
Buenos Aires	10 750 000
Rio de Janeiro	10 150 000
Kairo	9 300 000
Lagos	3 800 000
Johanesburg	3 650 000

SRETNNO VALENTINOVO!



$$y = \frac{2}{3} \left(\frac{(x^2 + |x| - 6)(x^2 + |x| + 2) + \sqrt{(36 - x^2)}}{(x^2 + |x| - 6)(x^2 + |x| + 2) - \sqrt{(36 - x^2)}} \right)$$