

Nastava vjerojatnosti u osnovnoj školi

Lidija Kralj, Veliki Bukovec

U svakodnevnom životu često čujemo, primjere, kako su šanse za dobitak 50%, svaki treći listić lutrije je dobitan, vrlo vjerojatno će sutra padati kiša, nema šanse da položimo ovaj ispit i sl. Vjerojatnost, bila ona u školskom programu ili ne, sastavni je dio svakodnevnog života. Zato je dobro da tu “svakodnevnu” vjerojatnost proučimo s matematičke strane, kako bismo, između ostalog, mogli donositi točne zaključke oko šansi za dobitak ili bilo koji drugi povoljan ishod neke situacije. Bi li učenici (i njihovi roditelji) kupovali lutrijske listiće kad bi znali kolika je vjerojatnost da dobiju glavni zgoditak na lutriji? Naš zadatak ipak nije samo naučiti učenike matematiku nego djelovati i odgojno. Vjerojatnost je područje koje nam zasigurno omogućava takav utjecaj.

1. Ciljevi i zadaće nastave vjerojatnosti

Nastava vjerojatnosti nije nikakva novost. U američkim programima se nalazi već desetljećima, a i naši susjedi Slovenci su je nedavno uveli s promjenama programa za devetogodišnju osnovnu školu. U oba spomenuta programa vjerojatnost se sustavno uvodi kroz cijelo trajanje osnovne škole, te nastavlja u srednjoj školi.

Pri poučavanju matematike u osnovnoškolskom programu ne spominjemo formalnu definiciju vjerojatnosti. Učenike pripremamo na kasniju matematičku analizu slučajnih događaja na podlozi intuicije i pokusa. Učenici, kroz smisljeno stupnjevane aktivnosti stječu

iskustva sa slučajnim događajima i tako prihvaćaju koncepte, principe i sposobnost predviđanja slučajnih događaja, što je u današnjem svijetu, koji je pun neodređenosti i nepredvidljivosti, vrlo važan cilj (M. Cotič, D. Felda, Matematika v šoli 11, 2004.).

NCTM-ovi standardi za nastavu matematike predviđaju da učenici od 3. do 8. razreda trebaju istraživati vjerojatnost u stvarnim situacijama tako da mogu:

3.–5. razred

- opisati događaje kao moguće i nemoguće; raspravljati o “stupnju” mogućnosti događaja upotrebom riječi: sigurno, jednako moguće, vrlo rijetko, vrlo često, često, nemoguće;
- predviđati rezultate jednostavnih pokusa i provjeravati ih;
- razumjeti da je mjera za mogućnost dešavanja događaja broj između 0 i 1.

6.–8. razred

- koristiti odgovarajuću terminologiju;
- računati vjerojatnost jednostavnih događaja;
- uspoređivati eksperimentalne rezultate s matematičkim očekivanjima (NCTM, 2000.).

2. Nastava vjerojatnosti u Hrvatskoj

Primjenom Hrvatskog nacionalnog obrazovnog standarda od sljedeće školske godine u program nastave matematike ulazi nova tema: *Vjerojatnost slučajnog događaja*. Za razliku

od američkog ili slovenskog sustava, kod nas je vjerojatnost izolirana tema koja se spominje samo u 7. razredu osnovnih škola, a zatim u 4. razredu prirodoslovno-matematičkih gimnazija.

U HNOS-ovim temama za matematiku za 7. razred naveden je ovaj tekst:

11. Vjerojatnost slučajnog događaja

Ključni pojmovi: slučajni događaj, elementarni događaj, relativna frekvencija događaja, vjerojatnost događaja.

Obrazovna postignuća: navesti elementarne događaje, prepoznati koji su elementarni događaji povoljni za zadani događaj, izračunati vjerojatnost događaja.

To gradivo je po prvi put obrađeno ove školske godine u školama koje pokusno provode HNOS. Literatura na hrvatskom jeziku je praktički nepostojeća jer se nitko dosada nije bavio uvođenjem vjerojatnosti u gradivo osnovnoškolske matematike. Analizirajući strane udžbenike, standarde te internetske izvore predlažem vam metodičku obradu vjerojatnosti u 7. razredu osnovne škole. Naglasak je stavljen na didaktičko oblikovanje i metode tako da vjerojatnost sadržajem, terminologijom i pristupom bude prilagođena našim trinaestogodišnjacima koji se prvi puta susreću s ovom temom.

3. Vjerojatnost slučajnog događaja

Za sadržaje iz područja vjerojatnosti potrebno je najmanje 5 sati. Pritom su sadržaji raspoređeni ovako:

1. sat – pokusi;

2. sat – rasprava o pokusima, uvođenje vjerojatnosti i računanja vjerojatnosti;

3.–5. sat – rješavanje različitih primjera i zadataka.

Detaljnije ćemo opisati svaki od spomenutih dijelova.

1. sat – pokusi

Metodička napomena: Prvi školski sat iz vjerojatnosti učenici odrađuju u grupnom radu. Svaka grupa radi četiri pokusa: s novčićem, kockicom, kuglicama i kartama. Pokusi s novčićem i kockicom su jednaki za sve grupe, a za kuglice i karte pripremljena su po dva različita kompleta. Primjerice jedna grupa ima pokuse 1, 2, 3 i 6; a druga 1, 2, 4 i 5. Dobro je da su po dvije grupe s istim pokusima kako bismo o njima mogli raspravljati na sljedećem satu. Učenici imaju na raspolaganju džepna računala.

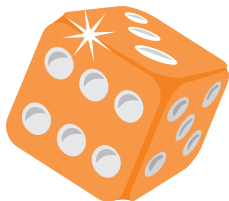
Prije početka rada na pokusima potrebno je ponoviti termine: frekvencija i relativna frekvencija, te uvesti novi termin — elementaran događaj. Elementarne događaje objašnjavamo kroz nabranje što se sve može dogoditi ako bacamo novčić — kažemo da su moguća dva elementarna događaja {pismo, glava}. Na isti način potičemo učenike da nam nabroje elementarne događaje za bacanje kockice, otvaranje imenika, izvlačenje obojane karte i sl. Da bismo učenicima olakšali određivanje svih elementarnih događaja, brojem redaka u tablici im sugeriramo koliko ih ima. Pokusi su odabrani tako da idu od jednostavnijih prema složenijima (novčić, kockica, kuglice i karte) te tako da ima pokusa u kojima su svi događaji jednako vjerojatni i pokusa u kojima nisu.

Pokus 1. Koja strana novčića češće pada.

Nabroji sve mogućnosti (elementarne događaje) koje se mogu pojaviti pri bacanju novčića.

Bacaj novčić 50 puta i bilježi koja strana je pala. Izračunaj relativnu frekvenciju i napiši je u obliku postotka. Koja strana novčića češće pada?

Elementarni događaj	Frekvencija	Relativna frekvencija

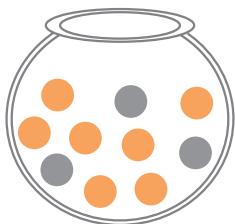
Pokus 2. Koji broj će pasti.

Nabroji sve mogućnosti (elementarne događaje) koje se mogu pojaviti pri bacanju kockice. Bacaj kockicu 50 puta i bilježi koja strana je pala. Izračunaj relativnu frekvenciju i napiši je u obliku postotka. Koji broj na kockici najčešće pada?

Elementarni događaj	Frekvencija	Relativna frekvencija

Pokus 3. Koju boju ćeš izvući (5 crvenih i 5 plavih kuglica).

Nabroji sve mogućnosti (elementarne događaje) koje se mogu pojaviti pri izvlačenju kuglice. Izvlači kuglicu 50 puta i bilježi koja boja je izvučena. Izračunaj relativnu frekvenciju i napiši je u obliku postotka. Koja boja je češće izvučena?

Pokus 4. Na koju kuglicu se dobro kladiti (3 crvene i 7 plavih kuglica).

Nabroji sve mogućnosti (elementarne događaje) koje se mogu pojaviti pri izvlačenju kuglice: Izvlači kuglicu 50 puta i bilježi koja boja je izvučena. Izračunaj relativnu frekvenciju i napiši je u obliku postotka. Koja boja je češće izvučena?

Pokus 5. Koja karta ima najveće šanse (2 zelene, 2 bijele, 2 crvene, 2 žute i 2 plave karte)

Nabroji sve mogućnosti (elementarne događaje) koje se mogu pojaviti pri izvlačenju karte. Izvlači kartu 50 puta i bilježi koja boja je izvučena. Izračunaj relativnu frekvenciju i napiši je u obliku postotka. Koja boja je najčešće izvučena?

Pokus 6. Koja karta ima najveće šanse (8 zelenih, 1 bijela, 3 crvene, 2 žute i 2 plave karte)

Nabroji sve mogućnosti (elementarne događaje) koje se mogu pojaviti pri izvlačenju karte. Izvlači kartu 50 puta i bilježi koja boja je izvučena. Izračunaj relativnu frekvenciju i napiši je u obliku postotka. Koja boja je najčešće izvučena?

2. sat – rasprava

Metodička napomena: Učitelj treba pripremiti prezentaciju ili prozirnice s praznim tablicama kakve učenici imaju u pokusima. U te tablice učitelj upisuje rezultate koje su učenici dobili pri pokusima. Ako ima više grupa s istim pokusima upisuju se rezultati svih grupa. U diskusiji se fraza “kolike su šanse?” povremeno zamjenjuje frazom “kolika je vjerojatnost?”.

Pri odgovaranju na ovakva pitanja učenici vrlo brzo shvate kolike su teoretske šanse za neki događaj, no u pravilu daju odgovore u obliku postotka, jer je tako uobičajeno u svakodnevnom životu.

Nakon upisanih rezultata za pojedini pokus učitelj potiče raspravu pitanjima: Zašto niste svi dobili jednake rezultate? Jeste li trebali svi dobiti jednake rezultate? Čiji rezultat je pogrešan?

Kakve su šanse da padne pismo na novčiću? Što mislite kakve su “teoretske šanse” da padne šestica na kockici? Kakve su šanse da na kockici padne sedmica?

Zašto su veće šanse za izvlačenje zelene karte? Koja karta ima najmanje šanse da je izvučemo?

Metodička napomena: Nakon rasprave još jednom prolazimo kroz svih šest pokusa uvodeći matematička objašnjenja tih pokusa, pojam vjerojatnosti te formulu za računanje vjerojatnosti. Računamo vjerojatnosti svih elementarnih događaja u pokusima i uspoređujemo te rezultate s rezultatima pokusa.

Pokus 1. Slijedeći eksperimentalna saznanja, matematičari su došli i do formula po kojima se mogu računati vjerojatnosti pojedinih događaja bez pokusa s velikim brojem ponavljanja.

Matematičko objašnjenje pokusa s novčićem bilo bi ovakvo. U tom pokusu ukupno su moguća dva elementarna događaja {pismo, glava}. Zanima nas vjerojatnost jednog od tih događaja, primjerice vjerojatnost da padne pismo. Označimo tu vjerojatnost s P (pismo).

Od dva moguća događaja samo jedan smatramo povoljnim za vjerojatnost koju računamo — da padne pismo.

$$P(\text{pismo}) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}} = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Naravno vjerojatnost da padne glava je također jednaka 0.5;

$$P(\text{glava}) = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Vjerojatnost da novčić padne na jednu odabranu, od dvije moguće strane je $\frac{1}{2}$.

Vjerojatnost nekog događaja A računamo kao omjer broja povoljnih i svih elementarnih događaja.

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}}$$

Vjerojatnost označavamo s P . Vjerojatnost je uvijek broj između 0 i 1.

Pokus 2. U posudi se nalazi deset kuglica. Tri kuglice su crvene, a sedam ih je plavih. Matija, ne gledajući, izvlači jednu kuglicu iz posude.

- Što misliš jesu li veće šanse da je Matija izvukao plavu ili crvenu kuglicu?
- Kolika je vjerojatnost da se izvuče jedna plava kuglica?
- Kolika je vjerojatnost da se izvuče jedna crvena kuglica?
- Na koju boju bi se ti kladio? Zašto?

$$P(\text{plava}) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}} = \frac{7}{10} = 0.7.$$

$$P(\text{crvena}) = \frac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}} = \frac{3}{10} = 0.3.$$

Metodička napomena: Prvo “odrađivanje” vjerojatnosti u razredu pokazalo je da učenici dobro prihvaćaju te sadržaje. Pokusi su u matematici ugodno osvježjenje. Sadržaji su odgovarajuće težine za 7. r. i učenici ih lako shvate i primjene. Pokazalo se da su ti sadržaji vrlo privlačni za djecu s prilagođenim programom jer imaju priliku nešto konkretno isprobati pa im je tako lakše shvatiti gradivo.

Moguća je zamka za učitelje — privlačnost vjerojatnosti i želja za produblivanjem i proširivanjem sadržaja — smatram da se u redovnom programu matematike treba strogo držati okvira vjerojatnosti kako je propisano HNOS-om.