

I. gimnazija, Zagreb



U raznim časopisima i knjigama redovito nailazimo na zadatke s viših razina natjecanja. Rijetko imamo prigodu vidjeti kako izgledaju zadaci sa školskih natjecanja, što je možda za nastavnike matematike i najzanimljivije. Stoga smo za naše čitatelje odabrali zadatke s ovogodišnjeg matematičkog natjecanja u jednoj općoj gimnaziji. Riječ je o I. gimnaziji u Zagrebu na kojoj su matematička natjecanja dugogodišnja tradicija i čiji su učenici u Zagrebačkoj regiji redovito među rijetkima koji se, uz učenike prirodoslovnih gimnazija, uspijevaju sa općinskog natjecanja plasirati i na gradsko (županijsko).

I. razred.

1. Odredi sve uređene parove cijelih brojeva za koje je

$$x^3 + y^3 - 6x^2 + 3y^2 + 12x + 3y - 8 = 0.$$

2. Vrijednosti od a, b, c i d su 1, 2, 3 i 4, ali ne nužno tim redom. Kolika je najveća moguća vrijednost od

$$ab + bc + cd + da?$$

3. Ako je $\frac{3x - 5y}{5x + 3y} = \frac{2}{3}$, koliko je $\frac{x + y}{x - y}$?

4. U dvije kutije jednak je broj pikula. Pikule su ili crvene ili bijele. Omjer broja crvenih i broja bijelih pikula u prvoj je kutiji 7 : 1, u drugoj 9 : 1. Ako je u obje kutije ukupno 90 bijelih pikula, koliko je crvenih pikula u drugoj kutiji?

5. Dvije kružnice različitih polumjera diraju se izvana. Promjeri tih kružnica osnovice su jednakokračnog trapeza. Kolika je površina trapeza, ako su središta kružnica udaljena 11 cm?

II. razred

1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje je $z^2 + \bar{z}^2 = 6$ i $z \cdot \bar{z} = 5$.

2. Pravcima paralelnim njegovim stranicama kvadrat je podijeljen na dva pravokutnika i dva kvadrata. Ako je stranica većeg kvadrata za 8 cm dulja od stranice manjeg, a

ukupna površina dvaju kvadrata iznosi 1000, kolika je duljina stranice velikog kvadrata?

3. Marina i Janko rješavaju kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$. Pri prepisivanju jednadžbe oboje su krivo prepisali po jedan njezin koeficijent. Janko je krivo prepisao koeficijent kvadratnog člana i dobio za rješenja jednadžbe brojeve -2 i $-\frac{3}{2}$. Marina je krivo prepisala koeficijent linearnog člana jednadžbe pa je dobila rješenja 2 i 3 . Kolika su rješenja zadane jednadžbe?

4. Odredi skup vrhova svih parabola koje su grafovi funkcija $f(x) = x^2 + mx + 1$, $m \in \mathbb{R}$. Prikaži taj skup grafički.

5. Dva su trokuta slična, ali ne i sukladna. Duljine stranica prvoga 5 cm, 7 cm i 10 cm. Duljine stranica drugoga su cijeli brojevi i duljina jedne od njih jednaka je duljini jedne od stranica prvog trokuta. Koliki je opseg drugog trokuta?

III. razred

1. Riješi jednadžbu:

$$\log_2 x \log_4 x \log_6 x = \log_2 x \log_4 x + \log_2 x \log_6 x + \log_4 x \log_6 x.$$

2. Ako je $x = \sin \alpha + \cos \alpha$, $y = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, prikaži y kao funkciju od x .

3. Riješi u skupu realnih brojeva jednadžbu:

$$x^2 - 2x \cdot \sin x - 2 \cos x + 2 = 0.$$

4. Kut α trokuta $\triangle ABC$ dvostruko je veći od kuta γ , a stranica a za 2 je cm dulja od stranice c . Ako je $b = 5$ cm, koliki je kut α ?

5. Na ravnini leže tri sfere i međusobno se dodiruju. Ako su duljine stranica trokuta čiji su vrhovi dirališta triju sfera s ravninom jednake a , b i c , koliki su polumjeri sfera?

IV. razred

1. Krivulje $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ i $y = ax^2 + bx + c$ imaju točno tri zajedničke točke. Dvije su $(-3, -3)$ i $(7, -3)$. Odredi treću.

2. Ako su $\overline{ade}_{(5)}$, $\overline{adc}_{(5)}$ i $\overline{aab}_{(5)}$ tri uzastopna prirodna broja zapisana u sustavu s bazom 5 , zapiši u dekadskom sustavu broj $\overline{abc}_{(5)}$.

3. Niz (a_n) definiran je na sljedeći način:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + 2n.$$

1) Odredi a_{100} i S_{100} ;

2) Odredi a_n i S_n .

4. Za pozitivne brojeve a i b vrijedi $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$. Ako je $f(2) = x$ i $f(5) = y$, koliko je $f(100)$?

5. Kolika je površina dijela ravnine koji je omeđen likom što ga određuje uvjet:

$$[x]^2 + [y]^2 = 1?$$

Rješenja iz prošlog broja:

$$\begin{array}{r} 8. \\ 44 \times 3 = 132 \\ + \quad \times \quad : \\ \hline 7 - 5 = 2 \\ \hline 51 + 15 = 66 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9. \\ 72 \times 7 = 504 \\ + \quad + \quad : \\ \hline 2 \times 63 = 126 \\ \hline 74 - 70 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10. \\ 2 \times 18 = 36 \\ \times \quad \times \quad + \\ \hline 93 + 3 = 96 \\ \hline 186 - 54 = 132 \end{array}$$