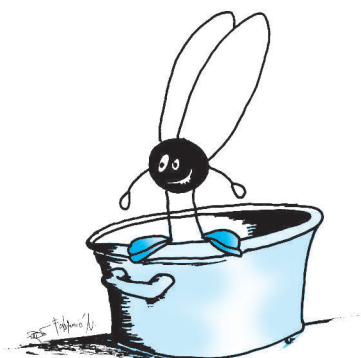


# Zadaci na maturi



## Prirodoslovno-matematička gimnazija, Križevci

1. Broj  $1 - 2i$  je nultočka polinoma

$$p(x) = x^3 + ax + b,$$

gdje su  $a, b \in \mathbf{R}$ .

- Odredi ostale nultočke polinoma  $p(x)$ .
- Nacrtaj graf polinoma  $p(x)$ .
- Izračunaj površinu koju graf polinoma zatvara s koordinatnim osima.
- Pod kojim kutom graf polinoma siječe os  $y$ ?

2. Zadana je kocka  $ABCDEFGH$ . Neka je  $M$  polovište brida  $\overline{EF}$ , a  $N$  središte kvadrata  $ABFE$ .

- Koliki je kut između pravaca  $MD$  i  $NC$ ?
- Koliki je omjer obujma piramide  $CDHGN$  i kugle opisane danoj kocki?
- Koliki je obujam odsječka kugle koji odsijeca ravnina jedne strane kocke, (duljina brida kocke neka je 1)?

3. a) Riješi jednađbu:

$$\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1.$$

- Neka su rješenja jednađbe prvi i deseti član rastućeg aritmetičkog niza, koliko ih treba zbrojiti da se dobije 19 000?

4. Jednoga dana Ivica je tik uz rubove stola ugledao prekrasan oval (nažalost, prazan). Budući da nam Ivica nije donio oval, predočio nam je sliku pomoću skupova točaka u koordinatnoj ravnini kojemu je ishodište u uglu stola (stol je pravokutan): skup  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0\}$  je rub ovala; skup  $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2|x - 3| + 3|y - 2| = 6\}$  je rub dijela ovala koji je pozlaćen prema van, a unutarnji dio je srebrne boje.

- Nacrtaj oval.
- Ivica je primijetio malu crnu točkicu (muhino djelo) na ovalu. Budući da nam nije rekao u kojem ju je dijelu vidio, izračunaj kolika je vjerojatnost da je muha nered napravila na pozlaćenom dijelu ovala?

(Napomena: površina lika omeđenog elipsom izvedena je kao vježba u 4. razredu)

5. Ana je u prvom razredu imala velik problem, jer im je učiteljica za domaću zadaću zadala da nacrtaju trokut. No Ana je u pernici imala 12 različitih i prekrasnih bojica, i krenula je na posao. Koliko je to Ana trokutića nacrtala, uz uvjet:

- da su sve stranice raznobojne
- da mogu čak i dvije biti jednakih boja
- da je nacrtala i jednoboje trokutiće?
- Nakon crtanja Ana vraća bojice u pernicu (pernica je preklopnog oblika i bojice se stavljaju u dio gdje je za njih predviđeno 12 rupica). Kolika je vjerojatnost da je Ana poslagala bojice u istom poretku kao i prije crtanja?
- Obavi prebrojavanja iz  $a$ ,  $b$  i  $c$  u ovisnosti o tome je li zadan: jednakostraničan, jednakokrtačan ili raznostraničan trokut kojemu treba obojati stranice Aninim bojicama.

5. Odredi broj  $p$  tako da točka  $A(3, 2\sqrt{6})$  leži na paraboli  $y^2 = 2px$ . Skiciraj parabolu. Izračunaj udaljenost točke  $A$  od ravnice parabole.

6. U posudi imamo 5 crvenih, 3 bijele i 2 plave kuglice. Slučajno izvadimo odjednom 3 kuglice. Izračunaj vjerojatnost događaja:  $A$  — kuglice su različitih boja i  $B$  — barem jedna kuglica je plava.

7. Riješi jednadžbu  $\sin 2x = -\sqrt{2} \sin x$ .

8. Oplošje jednakostraničnog stošca (duljina promjera osnovke je jednaka izvodnici) iznosi  $75\pi$ . Izračunaj omjer površina osnovke i plašta stošca. Koliki je obujam tog tijela? Rezultati neka budu točni.

9. Za koje vrijednosti  $x \in \mathbf{R}$  graf funkcije  $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$  leži iznad pravca  $y = 1$ ?

10. Odredi presjek i izračunaj kut što ga zatvaraju grafovi funkcije  $f(x) = e^{-x}$  i  $g(x) = e^{2x}$ . Kut izrazi u stupnjevima, zaokruženo na stotinke stupnja.

11. Izračunaj realni broj  $m$  tako da kut između vektora  $\vec{v} = (1, 0, 0)$  i  $\vec{a} = (m, m + 5, \sqrt{3})$  bude jednak  $60^\circ$ .

12. Realni broj  $a$  je pozitivan. Graf funkcije  $f(x) = -x^3 + a$  i koordinatne osi omeđuju lik površine 12. Odredi broj  $a$ .

## Zadaci s mature u Sloveniji

### Osnovna razina, kolovoz 2000.

1. Dan je niz  $x - 7, x - 4, x$ . Izračunaj  $x$  tako da niz bude geometrijski. Potom zapiši niz.

2. Znamenka desetice dvoznamenkastog broja za 3 je veća od znamenke jedinice. Ako broj podijelimo zbrojem njegovih znamenki, dobijemo količnik 6 i ostatak 8. Koji je to broj?

3. Riješi jednadžbu:  $2^{x-1} + 3 \cdot 2^x = \frac{7}{8}$ .

4. Provjeri da je broj  $2i$  korijen polinoma  $p(x) = 2x^4 + 3x^3 + 13x^2 + 12x + 20$ .

### Viša razina, kolovoz 2000.

1. Dan je beskonačan geometrijski red  $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} + \dots$

1) Izračunaj količnik odgovarajućeg geometrijskog niza i odredi  $x$  tako da zbroj bude jednak  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

2) Za koje vrijednosti  $x$  je zbroj jednak  $2 \cdot 3^{2x}$ ?

3) Za  $x = -1$  izračunaj zbroj  $S_n$  prvih  $n$  članova reda. Koliko najmanje članova reda moramo zbrojiti, tako da razlika zbroja  $S_n$  i zbroja beskonačnog reda bude manja od  $\frac{1}{200}$ ?

2. Dana je funkcija  $f(x) = |4 - 2x|$ .

1) Nacrtaj graf funkcije  $f$  u (danom) koordinatnom sustavu.

2) Graf funkcije  $f$  zatvara s pravcem  $y = 6$  trokut. Izračunaj površinu toga trokuta.

3) Napiši jednadžbu kružnice opisane trokutu što ga s koordinatnim osima zatvara pravac  $y = 4 - 2x$ .

3. U ravnini  $\Sigma$  leže točke  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(3, 1, 0)$ ,  $C(5, 2, -2)$  i  $D(3, 2, -1)$ .

1) Pokaži da je četverokut  $ABCD$  paralelogram.

2) Napiši jednadžbu ravnine  $\Sigma$ .

3) Odredi sjecište dijagonala paralelograma  $ABCD$  i izračunaj kut  $\varphi$  među dijagonalama. Kut zaokruži na stotinku stupnja.

4) Napiši jednadžbu jedne od ravnina koje su od ravnine  $\Sigma$  udaljene za tri jedinice.

\* \* \*

## ZATOČENICI KRALJA DADONA

U jednom ratnom pohodu kralj Dadon zarobi 100 vojnika. Pozatvara ih u samice. U hodnicima zatvora dežurala je do zuba naoružana straža pa je svaka mogućnost bijega zatočenika bila isključena. Svaka je samica imala bravu, brava se zaključavala ključem a sve je ključeve car Dadon nosio za pojasom. Jednim okretom ključa brava se zaključavala ili otključavala.

Car Dadon je odlučio na svoj rođendan osloboditi zatočenike. Dan ranije poslao je svojeg čovjeka da u svaku bravu stavi odgovarajući ključ i da ga jednom okrene. Tako su sva vrata bila otključana. No car se iznenada predomisli i pošalje novog posilnog neka okrene po jednom ključ u bravi svake druge samice po redu. I tako su prostorije s parnim oznakama bile zaključane. No i opet se Dadon predomislio pa je novi posilni okrenuo ključ u bravi svake treće samice.

I tako se Dadon stalno predomišljao. Četvrti posilni okrene ključ u svakoj četvrtoj bravi, peti u svakoj petoj, itd. Konačno Dadon pošalje svojeg stotog čovjeka da okrene jednom ključ u bravi na vratima stote samice.

Na sam Dadonov rođendan, straža se skloni i zatočenici iz otključanih samica izađu na slobodu.

Koliko je zatočenika oslobodio car Dadon?

**Rješenje zadatka.** Otvorene su na kraju bile one ćelije na kojima je ključ okrenut neparan broj puta, tj. one koje je pohodio neparan broj Dadonovih ljudi. Drugim riječima, to su sobe čiji brojevi imaju neparan broj djelitelja. No neparan broj djelitelja imaju samo potpuni kvadrati cijelih brojeva, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. Dodajmo tome i prvu prostoriju pa je prema tome car Dadon pustio na slobodu samo 10 zatočenika.