

Pismeno izražavanje u nastavi matematike, 1. dio

Dubravka Glasnović Gracin, Zagreb



Ukoliko nastavnik zanemaruje izražavanje učenika, učenik ostaje pasivan i tada, čak i u matematici, možemo doći u opasnost da dobijemo samo reprodukcijско matematičko znanje bez trunke razumijevanja: praznu reprodukciju algoritama, definicija, pravila i dokaza bez pravog uvida u gradivo. Jedan od načina kako realizirati dobru i plodnosnu komunikaciju jest poticanje pismenog izražavanja u nastavi matematike.

Dva smjera u nastavnoj komunikaciji

Gradivo matematike ima svoje specifičnosti, veže se uz naučeno više nego bilo koje drugo, često je apstraktno, traži se preciznost i točnost itd. Zbog toga je nastavnicima matematike oduvijek bio velik izazov učenicima što bolje objasniti to, po mnogima, “teško” gradivo. No, tu možemo doći u napast da (od želje da učenici što bolje razumiju gradivo, ali i od želje za kontrolom situacije) sebe i svoje izlaganje stavimo u prvi plan, dok učenik rješava zadatke i ostaje pasivan u izražavanju svojih ideja. Ponekad mi se čini da smo tjerani pritiskom

za što većim brojem riješenih zadataka, kao i problemima s natrpanim programima i razredima, zaboravili da komunikacija u razredu treba imati dva smjera. Cilj bi svakako trebao biti da učenik dobro razumije gradivo, ali i da se zna dobro izražavati (u pismenom i usmenom obliku) o matematičkim sadržajima. Ukoliko nastavnik zanemaruje izražavanje učenika, učenik ostaje pasivan i tada, čak i u matematici, možemo doći u opasnost da dobijemo samo reprodukcijско matematičko znanje bez trunke razumijevanja: praznu reprodukciju algoritama, definicija, pravila i dokaza bez pravog uvida u gradivo. Jedan od načina kako realizirati dobru i plodnosnu komunikaciju jest poticanje pismenog izražavanja u nastavi matematike.

Ovaj članak za MiŠ, koji govori upravo o tome, ima izvor u prezentaciji autorice u sklopu seminara "Schrift und Zahl" pod vodstvom prof. dr. Gerta Kadunza u lipnju 2007. u Klagenfurtu (Austrija). Za čitatelje MiŠ-a članak je znatno proširen, a korištena literatura se nalazi na kraju 2. dijela članka.

Pismeno izražavanje u nastavi matematike

Pod pismenim izražavanjem u nastavi matematike podrazumijevaju se postupci kojima učenici pismeno izražavaju svoja shvaćanja gradiva svojim vlastitim riječima i stilom. Pismeno izražavanje u nastavi matematike u literaturi nalazimo pod imenima "vlastite tekstualne produkcije učenika i učenica" (Selter) ili "autentični tekstovi o matematici" (Maier, 2000.).

Uz pismeno izražavanje svojim riječima, poželjno je da učenik na nastavi matematike paralelno usvaja i razvija i strog matematički simbolički jezik, kako bi se mogao dobro služiti kako govornim (pismeno i usmeno) tako i matematičkim jezikom za obrazlaganje i argumentiranje matematičkih ideja. U članku prof. Kurnika "Jezik u nastavi matematike" (MiŠ br. 33) možete saznati više o matematičkom i govornom jeziku u nastavi matematike.

Slijedi primjer iz sedmog razreda osnovne škole gdje učenik pismeno obrazlaže formulu za broj di-

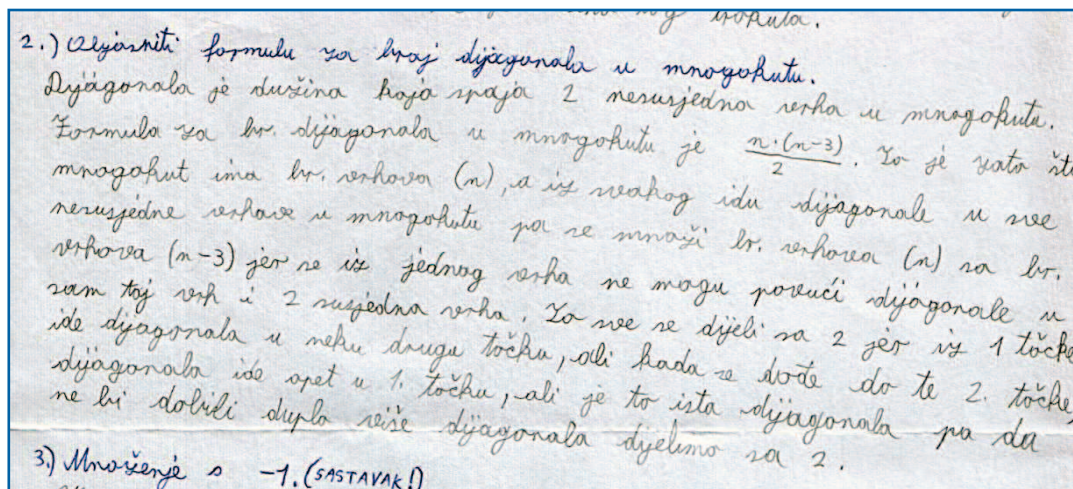
jagonala u mnogokutu. Na nastavnom satu razred je učio formulu za broj dijagonala u mnogokutu, pri čemu je nastavnica heurističkim razgovorom navela razred da izvede formulu. Slijedila je diskusija i dodatna pojašnjenja. Nakon toga su učenici pismeno svojim riječima obrazlagali formulu kako bi je i bez učenja napamet znali izvesti. Evo primjera kako je na pitanje odgovorio jedan odličan učenik sedmog razreda. Namjerno ostavljam autentičan učenikov zapis i izričaj.

Primjer 1: Rekonstrukcija onog što su učenici čuli na predavanju

Zadatak: Objasni formulu za broj dijagonala u mnogokutu.

Odgovor (Augustin, 13 godina, slika 1):

Dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha u mnogokutu. Formula za br. dijagonala u mnogokutu je $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$. To je zato što mnogokut ima br. vrhova (n), a iz svakog idu dijagonale u sve nesusjedne vrhove u mnogokutu pa se množi br. vrhova (n) sa br. vrhova ($n-3$) jer se iz jednog vrha ne mogu povući dijagonale u sam taj vrh i 2 susjedna vrha. To se sve dijeli s 2 jer iz 1 točke ide dijagonala u neku drugu točku, ali kada dođe do te druge točke, dijagonala ide opet u prvu točku, ali je to ista dijagonala pa da ne bi dobili duplo više dijagonala dijelimo sa 2.



Slika 1.

Iz ovakvog teksta nastavnik može zaključiti da je učenik shvatio formulu, da može slijediti tijek učenikovih misli, te pretpostaviti da bi učenik možda mogao izvesti zadanu formulu i u slučaju da je zaboravi. U sljedećem poglavlju navest će se neki argumenti zašto je dobro poticati ovakav pismeni način izražavanja.

Zašto poticati pismeno izražavanje?

Poneki čitatelj ovih redaka mogao bi se naći zbunjnjen poticanjem pismenog obrazlaganja “nadugačko” govornim jezikom na nastavi matematike. Zar za to ne postoji nastava materinjeg jezika sa svojim zadaćicama i pismenim provjerama razumijevanja teksta? Uz to, jedan od ciljeva nastave matematike je, zaista, korištenje matematičkog jezika pomoću matematičkih simbola koji je jednostavan, jezgrovit, sažet i točan. Zar pismeno obrazlaganje simboličkim jezikom nije dovoljno, zašto ipak poticati i obrazlaganja govornim jezikom? Ako ih već i poticati, zašto ih poticati baš pismeno, a ne samo usmeno?

No, za poticanje pismenog izražavanja u nastavi matematike postoje mnogi didaktički razlozi (Kuntze, Prediger, 2005): produbljivanje kvalitetne diskusije, aktivno i intenzivno bavljenje matematičkim sadržajima prilikom opisivanja, produbljivanje znanja, poticanje refleksivnog razmišljanja, mogućnost retrospekcije, važnost razvoja vlastitog izričaja, dijagnostički potencijal itd. Na taj se način učenici potiču osvijestiti si matematičke sadržaje, analizirati ih i usvojiti. Osim toga, prema Pimmu, zapisivanje mišljenja traži jači izričaj nego govor jer se na taj način očekuje točniji i precizniji prikaz nego u razgovoru. Jednom zapisane, misli su materijalizirane i time dostupnije, nisu nestale u zaborav te mogu poslužiti kao povod za kasnija razmišljanja i promišljanja. Pisanje zahtijeva i vrijeme da se zapažanja strukturiraju, vrijeme da se misli sakupe i da ih se prikaže. Uz to, pisanu riječ možemo kontrolirati, možemo je brisati pa ponovo pisati sve dok ne budemo zadovoljni pa tek onda misao podijeliti s drugima, za razliku od onog što je već izgovoreno u nekoj diskusiji. A evo i jednog

konkretnog razloga u prilog pisanim radovima: čitajući učeničke pismene uratke nastavnici se mogu dobro informirati u kojoj mjeri je učenik zapravo svladao gradivo.

Pogledajmo još jednom Primjer 1 u kojem 13-godišnjak obrazlaže formulu za broj dijagonala u mnogokutu. Zamislimo samo koliko je za tog učenika bio koristan napor svojim riječima objasniti naučeno, koliko mu je vlastito pismeno obrazlaganje pomoglo u produbljivanju znanja, osvješćivanju onoga što je shvatio na nastavi, poticanju preciznog izražavanja i sl. Čini se da su ovakvim zadatkom zadovoljeni i obrazovni i funkcionalni i odgojni zadaci nastave. Kao da je obična matematička formula iz 7. razreda stavljena na jednu višu razinu, koja se ne tiče samo reprodukcije naučenog, već se povezuje s kvalitetnim argumentiranjem o matematičkim sadržajima, te vježbanju lijepog, točnog i preciznog izražavanja kao i pravilnog korištenja pravopisa i gramatike. Učenik koji je ovo pisao se na nastavi matematike prvi puta susreo s ovakvim pismenim obrazlaganjem. Kada bi sličnih zadataka bilo više, njegova (i ne samo njegova) sposobnost matematičkog argumentiranja bi se zasigurno još više izoštrila.

Standardi i pismeno izražavanje

Razlozi zbog kojih bi se pismeno izražavanje trebalo poticati u nastavi matematike, a koji su spomenuti u prethodnom poglavlju, trebali bi biti dovoljan razlog da se takvo izražavanje spomene u nacionalnim obrazovnim standardima iz matematike. Doista, uvidom u austrijske matematičke Standarde (2007.), kao i američke Standarde (NCTM, 2000.), može se vidjeti da je tamo jasno i nedvosmisleno istaknuta matematička komunikacija kao jedan od ciljeva nastave matematike. Tako se u austrijskim Standardima navode četiri glavna područja djelovanja (sposobnosti), od kojih je jedna upravo *Argumentacija i objašnjavanje*. Američki Standardi idu u još dublje detalje, pa daju objašnjenja za sve segmente matematičke komunikacije:

“Učenici koji imaju priliku, poticaj i podršku za govor, pisanje, čitanje i slušanje u nastavi matematike žanju dvostruke blagodati: oni komuniciraju da bi naučili matematiku, i oni uče kako matematički komunicirati.” (NCTM Standards 2000, str. 60).

“Pisanje u sklopu nastave matematike može također pomoći učenicima učvrstiti njihovo mišljenje jer zahtijeva da se osvrnu na svoj rad i razbistre svoje misli o idejama iz nastave. Kasnije, učenicima bi moglo biti od pomoći ponovno pročitati zapis svojih vlastitih misli.” (NCTM Standards 2000, str. 61).

Naš HNOS-ov plan i program (Nastavni plan i program za osnovnu školu, 2006.) spominje zadaće nastave matematike, gdje se kaže da *“učenik treba naučiti matematički se izražavati pismeno i usmeno”*, te, između ostalog, *“razvijati preciznost i konciznost u pismenom i usmenom izražavanju”*. U njemu nažalost nema detaljno i sustavno elaboriranih matematičkih kompetencija (primjerice: nema potrebnih sposobnosti, te preporuke do koje težine zadataka treba ići), već se samo navode obrazovna postignuća po temama. Tu stoji i cilj nastave:

“Cilj nastave matematike je stjecanje temeljnih matematičkih znanja potrebnih za razumijevanje pojava i zakonitosti u prirodi i društvu, stjecanje osnovne matematičke pismenosti i razvijanje sposobnosti i umijeća rješavanja matematičkih problema.”

Jedini pojam koji bi mogao biti blizak pismenom izražavanju je *“matematička pismenost”* koja se spominje u gornjoj rečenici. Pritom nigdje nije prethodno definirano što se podrazumijeva pod tim pojmom. Radi li se o pismenosti u smislu poznavanja matematičkog jezika, ili pak o matematičkoj pismenosti (Glasnović, 2007.) u smislu PISA-ine definicije iste? Kad već spominjem PISA-u, u njezinom *Frameworku* jedna od osam glavnih matematičkih kompetencija je *matematička komunikacija*, koja se definira kao dvosmjerna sposobnost komuniciranja, tj. sposobnost da se razumije druge, kao i sposobnost vlastitog izričaja u usmenom, pismenom ili nekom vizualnom obliku. Ta se kompetencija pojavljuje u gotovo svakom PISA-inom zadatku, bilo da se

radi o razumijevanju zadatka, bilo da se traži da učenik pismeno svojim riječima obrazloži ili argumentira svoj odgovor, bilo da treba što nacrtati.

Primjena pismenog izražaja u nastavi matematike

Postoji mnogo načina kako poticati i primjenjivati pismeno izražavanje u nastavi matematike. Maier (2000.) navodi zgodnu sistematizaciju na koji način se u nastavi matematike može primijeniti pismeno izražavanje:

- izvještaj o rješavanju problema i izvještaj o istraživanju;
- opis pojmova ili postupaka;
- oblikovanje definicija, hipoteza, argumenata i dokaza;
- rekonstrukcija onog što su učenici čuli, vidjeli ili pročitali.

U tekstu koji slijedi pružit će se detaljnije informacije i konkretne ideje o spomenutim mogućnostima za pismeno izražavanje u nastavi matematike. Pritom je naglasak stavljen na prikaz stvarnih primjera učeničkih radova tj. *“autentičnih tekstova o matematici”* iz hrvatskih osnovnih i srednjih škola. Zahvaljujem kolegicama i kolegama s *Diskusijske liste nastavnika matematike* (<http://groups.yahoo.com/group/nastava-matematike>) koji su se odazvali mom pozivu i svojim učenicima zadali određene zadatke. Neki od učeničkih pismenih odgovora služe kao vrijedni primjeri u ovom članku. Oni su autentični, stoga ćemo u njima naići i na matematičke, logičke, te gramatičke i pravopisne pogreške. No, ostavljeni su čitatelju u izvornom obliku.

Izvještaj o rješavanju problema i izvještaj o istraživanju

Izvještaj o rješavanju problema se odnosi na pismeno obrazloženje kako su učenici riješili neki problem. Učenici sami svojim riječima opisuju pretpostavke, postavljaju problem te korake do

rješenja. Na taj način učenici mogu bolje razumjeti značenje pojedinog zadatka, objasniti dobre i loše putove rješavanja te obrazložiti svoja opažanja, a stavove i rješenja detaljno prikazati.

Primjer 2: Izvještaj o rješavanju problema

Učenicima za domaću zadaću možemo zadati neki zadatak s natjecanja "Klokan" (ili sličan) i tražiti ne samo da ga riješe, već da pismeno opišu kako su došli do rješenja.

Pismeno izražavanje može biti naročito korisno ukoliko ga učenici koriste kroz izvješće o istraživanju. Primjerice, učenik može napisati izvještaj o istraživanju koje je proveo u sklopu rješavanja nekog zadatka pomoću softvera dinamične geometrije, spomenuti što je primijetio, kakve ekstreme je moguće dobiti te pokušati obrazložiti razloge za to. Mladi "istraživač" pritom može prirediti i prezentaciju ili plakat o istraživanju.

Primjer 3: Izvještaj o istraživanju

Učenicima možemo zadati da posjete interaktivnu stranicu o elipsi <http://public.carnet.hr/~ssuljic/cjeline/elipsa/> i istraže svojstva elipse, te da svojim riječima opišu tijek i zaključke istraživanja, ili što ih se posebno dojmilo u dinamičnim apletima.

Opis pojmova i postupaka

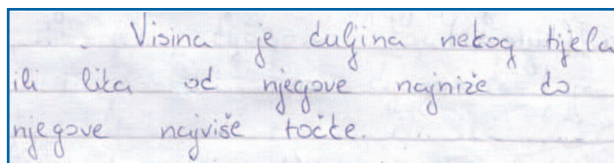
Učenici mogu u pismenom obliku opisati i matematičke pojmove ili postupke. Na taj način mogu povezati pojmove koji pripadaju istoj nastavnoj temi. To ne znači da ovdje trebaju strogo definirati matematičke pojmove, već ih opisati kako je prikazano, primjerice, u Primjeru 4 koji slijedi.

Primjer 4: Opis pojmova - visine

Zadatak: Kako biste učniku nižih razreda objasnili što su to visine trokuta?

Odgovor (Lucija, 13 godina, slika 2):

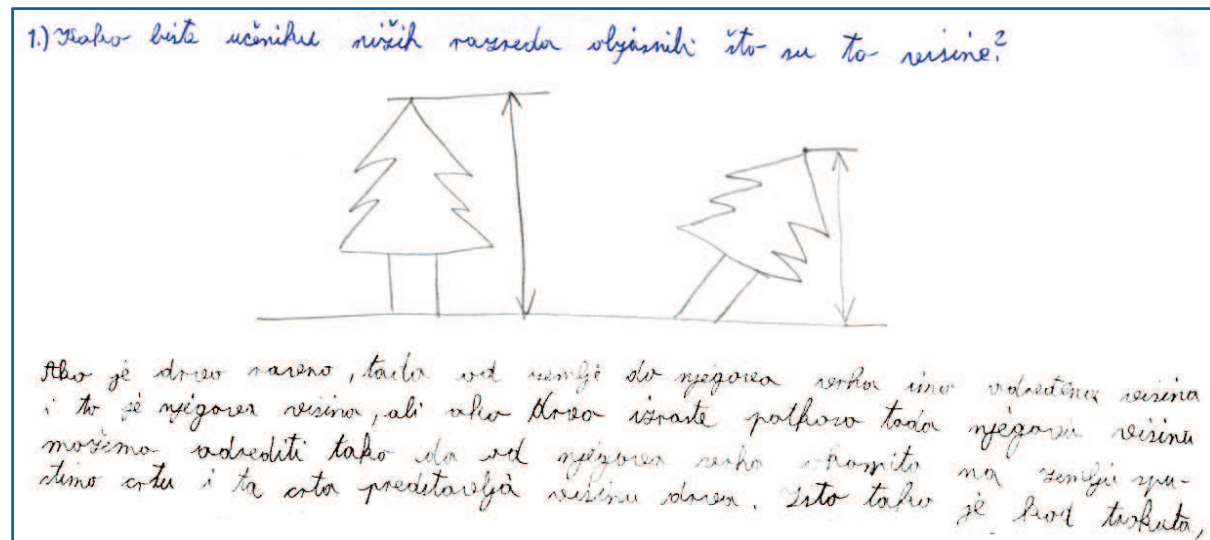
Visina je duljina nekog tijela ili lika od njegove najniže do njegove najviše točke.



Slika 2.

Odgovor (Augustin, 13 godina, slika 3):

Ako je drvo ravno, tada od zemlje do njegova vrha ima određena visina i to je njegova visina, ali ako drvo izraste potkoso tada njegovu visinu možemo



Slika 3.

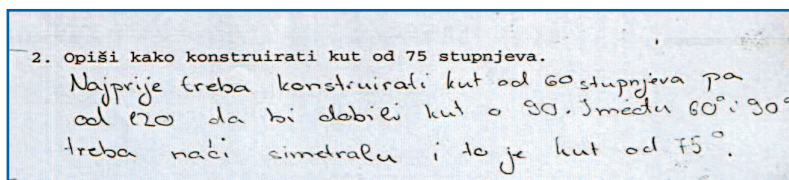
odrediti tako da od njegova vrha okomito na zemlju spustimo crtu i ta crta predstavlja visinu drveta. Isto tako je kod trokuta.

Što se tiče opisivanja postupaka, od svih spomenutih tekstualnih mogućnosti, u našoj nastavi se ova vjerojatno najčešće upotrebljava. Primjerice, učenici opisuju korake prilikom konstrukcije osno-simetričnog lika u odnosu na zadani lik, ili u drugim geometrijskim konstrukcijama.

Primjer 5: Opis postupka – konstrukcija kuta

Zadatak: Opiši kako konstruirati kut od 75° .

Odgovor (Kristina, 13 godina, slika 4):



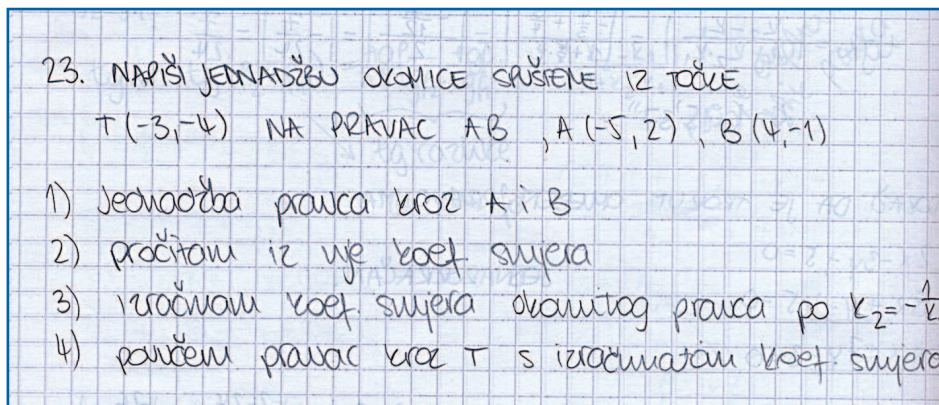
Slika 4.

Najprije treba konstruirati kut od 60° stupnjeva pa od 120° da bi dobili kut od 90° . Između 60° i 90° treba naći simetralu i to je kut od 75° .

Primjer 6: Opis postupka – jednadžba okomice iz točke na pravac

Zadatak: Napiši jednadžbu okomice spuštene iz točke $T(-3, -4)$ na pravac AB , $A(-5, 2)$, $B(4, -1)$.

Odgovor (Milica, 17 godina, slika 5):



Slika 5.

1) Jednadžba pravca kroz A i B

2) Pročitam iz nje koef. smjera

3) Izračunam koef. smjera okomitog pravca po $k_2 = -\frac{1}{k_1}$

4) Povučem pravac kroz T s izračunatom koef. smjera

Formuliranje definicija, hipoteza, argumenata i dokaza

Učenike bi trebalo poticati u formuliranju raznih tvrdnji, jer na taj način učenici opažaju, uspoređuju i otkrivaju matematičke odnose. Također, učenike treba poticati u skupljanju argumenata da pokažu kako neka tvrdnja vrijedi, te da sami pronalaze takve primjere i pripadne dokaze. Učenički tekstovi se zatim u razrednoj diskusiji mogu raspraviti. Na taj način će se lakše otkloniti pogreške i netočnosti, što je vrlo važan trenutak u nastavi matematike.

Primjer 7: Definicija – Nepravi razlomci

Učenicima šestih razreda možemo, primjerice, zadati da u sklopu heurističkog razgovora ili uvodne diskusije definiraju nepravne razlomke, a da ih prije toga nastavnik nije samostalno definirao.

Nastavak u sljedećem broju.