

# Metodička strana matematičkih natjecanja



Zdravko Kurnik, Zagreb

U ovom članku dat ćemo pregled glavnih doprinosa matematičkih natjecanja koji primjerenim metodičkim pristupom mogu osigurati kvalitetnije i potpunije matematičko obrazovanje šireg kruga učenika.

U današnje je vrijeme teško naći područje ljudske djelatnosti za koje ne treba odgovarajuće matematičko znanje. Svakodnevni rad iziskuje sve više umnog napora, analizu složenijih procesa, pravilnih logičkih zaključivanja, primjenu određenih matematičkih metoda i dr. Zato u društvu raste (i dalje će rasti) potreba za stručnjacima s navikama jasnog logičkog mišljenja, s dobrim matematičkim znanjem i umijećem primjene tih znanja u različitim konkretnim situacijama. Oblikovanje i razvijanje tih osobina pretežno se postižu u redovnoj nastavi matematike putem ostvarenja ciljeva i zadataka nastave matematike.

U tim ciljevima i zadacima spominju se sljedeći pojmovi:

*znanje, umijeće, sposobnost, navika, metoda, pisana riječ, usmena riječ, samoobrazovanje, interes, matematičko mišljenje, matematička kultura, sredstvo, pomagalo, primjena stručne literature i dr.*

Ostvarenju navedenih ciljeva i zadataka nastave matematike doprinose i razne aktivnosti izvan razreda i škole, a posebno važnu ulogu u njima imaju matematička natjecanja.

## Interes

Jedan od ciljeva matematičkih natjecanja je pobuđivanje i širenje interesa za učenje matematike. Ostvarenju tog cilja pogoduje činjenica da na po-

jedinim natjecanjima mogu sudjelovati svi učenici, ne samo najbolji. Stvarnost potvrđuje tu činjenicu: iz godine u godinu u našoj zemlji raste broj matematičkih natjecanja i broj natjecatelja. Taj interes nastavnika može obnavljati i podržavati na razne načine. Evo nekih od njih:

*prikaz rješenja pojedinih natjecateljskih zadataka u redovnoj nastavi, natjecateljski zadaci kao dodatni zadaci za naprednije učenike, izrada panoa s rezultatima natjecanja (zadaci, rješenja, uspjeh škole), osvrt na natjecanje u matematičkoj radionici, proučavanje knjižice natjecanja.*

Ako se tako radi tijekom cijelog godišnjeg ciklusa natjecanja, taj rad postaje značajan element pripreme učenika za iduća natjecanja.

## Znanja

Za nalaženje rješenja bilo kojeg zadatka potrebno je određeno znanje. To su one teorijske činjenice koje su u najužoj vezi s uvjetima i ciljem zadatka. U nastavi matematike zadaju se pretežno standardni zadaci za čije su rješavanje dovoljne činjenice obrađene neposredno u samoj nastavi. S druge strane, na matematičkim natjecanjima pojavljuju se složeniji zadaci, problemski zadaci za čije je rješavanje potrebna bogatija teorijska osnova i dodatne činjenice. Povoljna je okolnost da mnogi natjecatelji imaju veća znanja o zadacima od onih koja dobivaju u redovnoj nastavi. Ta su znanja stekli samostalno iz nekih drugih izvora. Međutim, još uvijek postoji nesklad između redovnih i dodatnih znanja. Tako se događa da se u rješavanju nestandardnih i složenijih matematičkih problema na natjecanjima često dobro ne snalaze ni naši najbolji učenici i postižu slabe rezultate. Manjkaju im određena znanja, pa i ona koja bi nužno trebali imati. Neka od njih možemo precizno navesti. U programima po kojima se učenici natječu piše da za više razine natjecanja oni trebaju poznavati i sljedeća dodatna područja:

*kombinatorni zadaci, logički zadaci, diofantske jednačbe, Dirichletov princip (OŠ), matematička indukcija, elementarna teorija brojeva, osnovne nejednakosti o sredinama (SŠ).*

## Sposobnosti

Glavni cilj suvremene nastave matematike je razvoj matematičkih sposobnosti i matematičkog mišljenja učenika. Ovaj cilj odnosi se na sve učenike, jer svaki učenik ima matematičke sposobnosti potrebne za svladavanje školskih matematičkih sadržaja. I HNOS postavlja ciljeve čija ostvarenja omogućuju razvoj i usavršavanje obrazovanja, pa i matematičkog. Svi ciljevi u kojima se navode različite sposobnosti učenika, koje su u uskoj vezi s matematičkim natjecanjima, mogu se podvesti pod zajednički nazivnik:

*razvijanje sposobnosti za rješavanje matematičkih problema.*

Podrobnija analiza rezultata s matematičkih natjecanja otkriva da neke matematičke sposobnosti jednog dijela natjecatelja, s obzirom na njihov uzrast, nisu dovoljno razvijene. Razlog tome može ležati ili u naglom prijelazu sa standardnih na rješavanje problemskih zadataka, ili u zanemaranju teorije i pokazivanju pretjeranog interesa za rješavanje zadataka, ili u nepoznavanju osnovnih postupaka rješavanja

S druge strane, učenici nisu uvijek svjesni koliko su sposobni. Njihove sposobnosti su nerijetko veće nego što sami pretpostavljaju. Budući da se navedene sposobnosti ispoljavaju vrlo rano, nastavnik matematike ih kod svakog učenika može pravovremeno uočiti. Najbolje se to postiže upućivanjem učenika na natjecanja. Na njima se učenicima ispunjava prirodna želja da provjere svoje matematičke sposobnosti. Nakon toga nastavniku preostaje samo neprekidno praćenje i djelotvorno utjecanje na njihov daljnji razvoj. U našem sustavu matematičkih natjecanja proces praćenja počinje od četvrtog razreda osnovne škole.

## Metode

Metode rješavanja matematičkih problema su posebna znanja o kojima vrlo često ovisi uspješnost sudjelovanja učenika na natjecanjima. Upravo tu leži veliki problem. Nije rijedak slučaj da i naši najbolji učenici ne poznaju neke jednostavne metode rješavanja matematičkih problema. Zbog toga su

za njih mnogi zadaci teži nego što to oni stvarno jesu. Rješavanje tog problema nije daleko. Kako u svakom području matematike postoji niz razrađenih i učinkovitih metoda rješavanja raznovrsnih problema, potrebno je samo da nastavnik napravi kratku metodičku razradu pojedine metode i upozna svoje učenike natjecatelje s njezinom primjenom i djelotvornošću. Poznavanje dovoljnog broja učinkovitih metoda rješavanja matematičkih problema omogućuje lakše svladavanje novih problema i pozitivno utječe na matematičke sposobnosti i trajnost znanja učenika.

Dvije su važne klase metoda koje se susreću i u nastavi matematike. Većina od njih nije usko vezana za neko određeno područje matematike, već je njihova primjena raznovrsnija. To su:

- I) osnovne metode znanstvenog mišljenja i istraživanja: analiza, sinteza, apstrakcija, konkretizacija, indukcija, dedukcija, generalizacija, specijalizacija;
- II) posebne metode rješavanja matematičkih problema: metoda analogije, metoda supstitucije, metoda neodređenih koeficijenata, metoda rekurzije, metoda matematičke indukcije, metoda razlikovanja slučajeva, metoda superpozicije, metoda uzastopnih približavanja, Descartesova ili algebarska metoda i dr.

Međutim, i za neko određeno matematičko područje može postojati više različitih metoda rješavanja problema. Navodimo tri takva područja:

- 1) Konstruktivna geometrija: metoda presjeka, metoda osne simetrije, metoda rotacije, metoda centralne simetrije, metoda translacije, metoda homotetije, metoda sličnosti, metoda inverzije, metoda afinosti, metoda kolineacije.
- 2) Diofantske jednadžbe: metoda umnoška, metoda kvocijenta, metoda parnosti, metoda posljednje znamenke, metoda nejednakosti.
- 3) Nejednakosti: očigledan način dokazivanja, primjena posebnih nejednakosti, posebni postupci, metoda matematičke indukcije, analitičko-sintetička metoda.

## Dokaz

Zadaci su važno sredstvo pri oblikovanju učeničkova sustava osnovnih matematičkih znanja, umijeća i navika, te doprinose razvoju njihovih matematičkih sposobnosti i stvaralačkog mišljenja. Na matematičkim se natjecanjima vrlo često zadaje posebna vrsta zadataka, dokazni zadaci. Ta činjenica može poslužiti za obrazloženje potrebe dokazivanja tvrdnji u nastavi matematike. Drugi razlog leži u činjenici da *učiti dokazivati* znači *učiti rasuđivati*, a to je jedan od osnovnih zadataka nastave matematike.

Dokazne zadatke s natjecanja nastavnik matematike treba iskoristiti za detaljniju metodičku obradu i upoznavanje učenika sa sljedećim pojmovima:

*poučak, pretpostavka, tvrdnja, zaključak, dokaz, direktni dokaz, indirektni dokaz.*

Učitelj matematike je u tom pogledu u težem položaju nego profesor matematike, jer je u osnovnoj školi broj dokazivanja poučaka znatno manji nego u srednjoj školi. Postoji i mišljenje da dokazivanje u nastavi matematike u osnovnoj školi nije potrebno, što je, zbog gore navedenih razloga, pogrešno. Osim toga, ako učenik u osnovnoj školi nije u nekoj mjeri upoznao postupak dokazivanja, imat će u srednjoj školi znatnih poteškoća pri njegovom razumijevanju. Zaključak je jasan: matematičko obrazovanje učenika nije potpuno ako on tijekom školovanja nije upoznao i shvatio dokaze nekoliko standardnih matematičkih poučaka.

## Kreativnost

Za vrijedna postignuća u području matematike nije dovoljno imati samo određene matematičke sposobnosti, već je nužna razvijena motivacija za ustrajno učenje i traganje za odgovorima kao i poseban način primjene stečenih znanja – *kreativnost*. Matematička sposobnost, motivacija i kreativnost tri su osebujne značajke onog što se naziva *stvaralačka sposobnost*.

U nastavi matematike rijetko se pojavljuju problemski zadaci. Rješavaju se pretežno standardni i poneki nestandardni zadatak. Istina, i na taj na-

čin učenici ovladavaju sve većim znanjem, ali imaju malo prilika za iskazivanjem nekih svojih posebnih sposobnosti.

Natjecateljski im zadaci to bolje i brže omogućuju. Natjecateljski su zadaci u pravilu problemski zadaci, nerijetko i s više načina rješavanja. Tek su oni plodno tlo na kojem učenici mogu iskazati neku od svojih kreativnih osobina:

*radoznalost uma, brzo izvođenje računskih operacija, lako izvođenje složenijih računskih operacija, lako razumijevanje problema, sposobnost provođenja duboke analize, otkrivanje različitih načina rješavanja problema, stvaranje i iznošenje novih ideja, sposobnost uočavanja i postavljanja problema, ustrajnost u radu, samostalnost, maštovitost, dosjetljivost, umijeće uspoređivanja dobivenih rezultata, sposobnost uspostavljanja analogija, sposobnost poopćavanja, sposobnost apstrahiranja, umijeće izvođenja pravilnog logičkog rasuđivanja.*

Nove i svježije ideje učenika i originalna rješenja problema na natjecanjima često ugodno iznenađuju i same sastavljaju zadatka. Ali postoje i obrnute situacije. Pogledajmo jednu takvu situaciju:

Na državnom natjecanju 1994. godine učenici I. razreda trebali su dokazati nejednakost:  $(p^2+p+1)(q^2+q+1) \geq 9pq$  ( $p, q$  pozitivni brojevi). Rezultati nisu bili zadovoljavajući. Od 26 učenika zadatak je točno riješilo 10 učenika, ali i 13 učenika nije osvojilo ni bod. S druge strane, u metodičkoj radionici studenti, budući nastavnici matematike otkrili su četiri različita rješenja. Viša razina? Da, ali bitna je pritom samo činjenica da su ta rješenja bila jednostavna i kreativna. To znači da učenici nisu bili dobro pripremljeni.

Kad je u pitanju kreativnost učenika, kreativan nastavnik može na matematičkoj radionici puno postići metodičkim pristupom. Svaku uočenu kreativnu osobinu natjecatelja pri rješavanju natjecateljskih zadataka treba dalje podržavati i njegovati, a kod ostalih učenika nastojati postupno razvijati.

## Literatura

Danas postoji velik broj pisanih materijala koji omogućuju bolje pripreme učenika za natjecanja. Učenici svakako trebaju znati za osnovnu literaturu koja je u vezi s određenim razinama natjecanja.

## Radionica

Primjeren oblik obrade područja koja natjecatelji trebaju poznavati je organiziranje matematičkih i metodičkih radionica. Mjere koje se odnose na poboljšanje priprema učenika za natjecanja putem dublje stručne i metodičke obrade nekog područja matematike nastavnik može na radionici preciznije razraditi u nekoliko odjeljaka:

- zadaci s naših natjecanja (psihološka priprema učenika),
- teorijska osnova (metode rješavanja, poučci),
- problemi u matematičkoj radionici (primjeren izbor),
- metodička analiza i rješavanje (ovladavanje područjem obrade),
- dodatni problemi (samostalni rad učenika),
- izvještaj o rješavanju problema i izvještaj o istraživanju.

Ovakva opsežnija metodička razrada postoji za sljedeća područja: zadaci s više načina rješavanja (SŠ, 2004.), nejednakosti (SŠ, 2005.), diofantske jednadžbe (OŠ, 2007.).

## Zaključak

U radu s naprednijim i nadarenim učenicima, a posebno s natjecateljima, potrebno je:

više pažnje posvetiti metodičkoj strani procesa rješavanja zadataka, njegovati i razvijati kreativnost učenika, povećati broj problemskih zadataka, zadatke prilagoditi primjeni nekih matematičkih postupaka koji služe za uvođenje učenika u istraživački i stvaralački rad i razvijati kod učenika naviku uporabe stručne literature.

Rezultati neće izostati.