

Računalo u nastavi matematike

Teorijska podloga i metodičke smjernice

Dubravka Glasnović Gracin, Zagreb



1. dio: Potencijali primjene računala u nastavi

Uvod

Na matematičkim seminarima i kongresima u Hrvatskoj možemo vidjeti zaista vrijedne primjere primjene računala u nastavi koje nam pripremaju naši kolege iz cijele zemlje. Također, sa svakim novim brojem MiŠ-a sa zanimanjem čitamo, između ostalog, članke o primjeni dinamične geometrije u nastavi matematike (primjerice, Šuljić 2005., 2006.). Stoga naši nastavnici, ako to žele, vrlo lako mogu doći do gotovih i korisnih materijala na hrvatskom jeziku u kojima se primjenjuje računalo u nastavi matematike i koje mogu koristiti na satu.

Međutim, unatoč brojnim uradcima naših kolega, čini mi se da u MiŠ-u još nismo imali prilike pročitati sistematiziranu teorijsku podlogu za upotrebu računala u nastavi matematike, zatim o promjenama u nastavi koje se nužno događaju uvođenjem računala, te o razlozima zašto i kada je korisno koristiti računalo u nastavi matematike.

Ovaj članak sadrži sistematizirani pregled potencijala primjene računala u nastavi matematike, kao i nekih saznanja o bitnim promjenama u nastavi matematike prilikom upotrebe računala na satu. Nadalje, razmatraju se i problemi vezani uz primjenu računala u nastavi matematike. Detaljan pregled ovog područja prikazan je u knjizi od E. Schneider (2002.) gdje je izložena sistematizacija problematike, kao i neka praktična iskustva s primjenom računala u nastavi matematike.

Računalo

U ovom članku se pod primjenom računala u nastavi matematike podrazumijeva edukativno korištenje računala sa specijaliziranom matematičkom računalnom podrškom u nastavi. Spomenuta specijalizirana softverska podrška odnosi se na one programe koji podržavaju jedan ili više matematičkih prikaza (grafičkih, simboličkih, tabelarnih).

nih). To su, primjerice, razni programi dinamične geometrije, tablični kalkulatori, grafički alati te sustavi računalne algebre (engl. Computer Algebra System, kratica CAS). Uz spomenute, postoji još niz raznih programa koji se koriste u nastavi matematike, nazovimo ih općenito interaktivnim alatima. To su programi namijenjeni općenitoj edukaciji i sadržaj im može biti namijenjen učenju bilo kojeg predmeta, pa tako i matematike. To su, primjerice, razni matematički primjeri napravljeni u *Flashu*, zatim *Hot Potatoes* kvizovi, web aplikacije i sl. Opišimo svaku od gore navedenih skupina.

Computer algebra system (CAS) je program koji podržava prikaz i manipulaciju sa simboličkim matematičkim izrazima. Najčešće takvi sustavi, uz simbolički, imaju i mogućnost grafičkog i tabličnog prikaza te je lako prebacivati se iz jednog prikaza u drugi. Primjeri CAS-a su paketi *Mathematica*, *Maxima*, *Maple*, *Derive*, zatim CAS softver u računalima TI-92, HP-49, *Casio ClassPad 300* itd. Na web stranici http://en.wikipedia.org/wiki/Comparison_of_computer_algebra_systems može se naći usporedba raznih CAS-ova.

Programi dinamične geometrije imaju mogućnost lakog mijenjanja položaja ucrtanih geometrijskih objekata, pri čemu matematički odnosi među objektima s ekrana ostaju sačuvani. Softveri dinamične geometrije prevedeni na hrvatski jezik i u široj upotrebi u našim školama su *GeoGebra* i *The Geometer's Sketchpad*. Iako je već nabrojana u softveru dinamične geometrije, još nekoliko riječi o programu *GeoGebra*, koji objedinjuje svojstva softvera dinamične geometrije i svojstva CAS-a. CAS programi su (za sada) statični, što znači da nemaju mogućnost animiranog pomicanja objekata poput softvera dinamične geometrije. S druge strane, klasični programi dinamične geometrije (poput *Sketchpada* i *Cabri Geometryje*) nemaju mogućnost algebarskih prikaza koji će biti povezani s postojećim grafičkim prikazom. Ali *GeoGebra* posjeduje kako svojstva dinamične geometrije (animirano pomicanje geometrijskih objekata), tako i mogućnosti CAS-a (prikazivanje u simboličkom i grafičkom obliku). Uz to, *GeoGebra* spada u grupu besplatnih *open source* programa, vrlo je

dostupna za preuzimanje i ima svojstvo da za *online* rad s uradcima načinjenim u *GeoGebri* ne moramo imati instaliranu *GeoGebru* na računalu.

Grafički alati su specijalizirani programi za dvodimenzionalne i trodimenzionalne prikaze funkcija i geometrijskih objekata. To su, primjerice, *Gnuplot*, *Dplot*, *Winplot*, *Google SketchUp* itd.

Tablični kalkulatori su programi koji računaju i prikazuju rezultate u obliku tablice. Primjerice, u širokoj upotrebi su programi *OpenOffice Calc*, *MS Excel* i *Gnumeric*.

U interaktivne alate spada niz međusobno različitih programa, a zajednička karakteristika im je svima da su to programi široke namjene kojima se mogu izraditi sadržaji za učenje bilo koje tematike, pa tako i matematike. To su, primjerice *Flash* animacije i zadaci, zatim razni kvizovi napravljeni u programu *Hot Potatoes* ili nekom drugom, razne web aplikacije sa sadržajima za učenje matematike i slično.

Spomenimo i "obična" *džepna računala* ili kalkulatora jer će se mnogi didaktički aspekti iz teksta moći iskoristiti i na primjenu kalkulatora u nastavi matematike. Najjednostavniji modeli s četiri osnovne računske operacije dostupni su svima, a ugrađeni su i u mobitele. Tehnološki razvoj donosi nam kalkulatora sa sve većim izborom funkcija i mogućnosti. Tako se na tržištu pojavljuju kalkulatori pod nazivima znanstveni, financijski, grafički itd., već prema svojstvima i mogućnostima koja su u njih ugrađena. Današnji grafički kalkulatori ne samo da graniče s CAS-om, već su i prava mala osobna računala.

Rasterećenje nastave od operiranja

Svako računalo, pa i džepno, (sama riječ "računalo" to govori) ima prije svega sposobnosti "računanja", što znači rješavanja numeričkih zadataka. To njegovo svojstvo može se iskoristiti u nastavi matematike na način da se učenici više usmjeravaju idejama i postavljanju zadataka, a da računalo obavi većinu "operativnog" posla. Na učenicima je da o rezultatima dobivenima računalom potom

diskutiraju i donose zaključke. Ne zaboravimo ni složene geometrijske konstrukcije koje može izvesti računalo, a korištenjem softvera dinamične geometrije možemo provoditi plodonosne diskusije već i u osnovnoj školi.

Dakle, operativno znanje se većim dijelom ostavlja računalu (tzv. *outsourcing*), a time se dobiva više vremena za kvalitetnu interpretaciju i prosudbu dobivenih rezultata. O kojem se tu operativnom znanju radi?

"Kreiranje tablica, transformiranje izraza, rješavanje jednadžbi i nejednadžbi te njihovih sustava, operacije s matricama, deriviranja i integriranja numerički i simbolički, crtanje grafova funkcija (čak i trodimenzionalnih) se već mogu izvesti mnogo brže i bolje čak i s jeftinim softverskim proizvodima nego što će ih napredni učenik riješiti ručno." (cit. Schneider, 1999.)

Taj je princip u skladu s Fischerovom obrazovnom filozofijom i "komunikacijom s ekspertima" (Fischer, str. 1), o kojoj će, nadamo se, opširnije biti riječi u nekom od budućih brojeva MiŠ-a. Ukratko, za današnju nastavu matematike (i ne samo u Hrvatskoj!) je specifično da se stavlja snažan naglasak na znanja operiranja, koja su kao posljedica toga često svedena na gotove recepte bez imalo razumijevanja. Uvodni dijelovi gradiva se u nastavi izvedu nabrzinu, zatim slijedi velik dio posvećen operiranju, a za poticanje refleksije i diskusija nema vremena (ili to učini nastavnik, a ne učenici). Fischer, naprotiv, smatra da se naglasak u nastavi matematike treba staviti na osnovna znanja i na refleksiju, a da operiranje treba prepustiti stručnjacima. Ti *stručnjaci* su u ovom slučaju – računala. Prevedeno na trenutnu temu o računalima u nastavi matematike: trebalo bi više vremena posvetiti osnovnom znanju i naporu da učenici uistinu usvoje matematičke pojmove i koncepte. Operiranja bi trebalo prepustiti stručnjacima, tj. računalima ili kalkulatorima (ali ne sasvim, već gdje je to opravdano), dok bi interpretaciju problema kao i promišljanja o rješenju opet trebalo prebaciti na učenike i taj dio vrlo njegovati, odvojiti za njega vrijeme da učenici vježbaju sposobnosti refleksije.

No, mnogi nastavnici to *rasterećenje nastave od ručnog operiranja* smatraju lošim jer im se čini da

bi nastava matematike bez takvih operiranja bila vidno osiromašena. Te bojazni nisu nove, one se javljaju još od uvođenja prvih džepnih računala u nastavu (a možda i ranije?). Činjenica jest da se nastava matematike bitno mijenja primjenom računala, da se uz novosti javljaju i neke opasnosti, te je ovo svakako tema za diskusiju. U sljedećem broju MiŠ-a bit će opisane promjene i problemi koji se pritom događaju. Sada će pak biti navedeni oni aspekti u kojima nastava matematike "dobi-va krila" upotrebom računala, tj. u kojima ova nastava ima očitu prednost pred tradicionalnom.

Potencijali računala u nastavi matematike

Postavimo stoga pitanja: Koje su to posebne mogućnosti i potencijali primjene računala u nastavi matematike? U kojim je to trenucima i aspektima posebno korisno rabiti računalo u nastavi matematike, a u kojima je ipak bolje primijeniti nastavu s tradicionalnim sredstvima?

Odgovore na ova pitanja potražimo u dostupnoj literaturi gdje se spominju četiri *posebne mogućnosti* (aspekta) koje nudi upotreba CAS-a u nastavi matematike. To su (prema Schneider, 2002.):

- *Različiti oblici prikazivanja* (tj. direktna dostupnost različitih oblika prikazivanja matematičkih sadržaja, te lagano prebacivanje iz jednog oblika u drugi, npr. iz simboličkog u grafički i sl.);
- *Eksperimentalni rad* (tj. mogućnost da učenici samostalno kroz eksperimentiranje dođu do novih spoznaja, ideja i rješenja problema);
- *Elementariziranje matematičkih postupaka* (tj. upotreba računala omogućuje korištenje elementarnih metoda koje su bile napuštene zbog zahtjevnih računanja);
- *Modularitet* (tj. sposobnost direktnog pozivanja naredbi, bez zamaranja s koracima algoritma i postupcima izračuna).

U prvoj točki ove sistematizacije (Različiti oblici prikazivanja) dodala bih još i mogućnost *dinamike* u prikazu. To svojstvo (pogotovo ako ga pove-

žemo s upotrebom boje) ima vrlo velik didaktički potencijal zbog svojeg učinka na stjecanje znanja kod učenika. Dinamika se može odnositi na geometrijske objekte, tj. kada objekti i nakon izmjena zadržavaju svoja matematička svojstva i odnose, što je odlično za eksperimentiranje. Taj potencijal imaju softveri dinamične geometrije, kao i neki interaktivni i grafički alati. Ali, dinamika se može primijeniti i na simboličke prikaze (primjerice, animacija određenih numeričkih svojstava i sl.), simulacije itd. Sada ćemo поближе upoznati svaki od potencijala računala u nastavi matematike, s naglaskom na prva dva.

Različiti oblici prikazivanja

GeoGebra i CAS sustavi imaju mogućnost prikazivanja matematičkog gradiva na različite načine, te se brzo prebacivati iz jednog oblika u drugi. Prema Böckmannu (izvor u Schneider, 2001.) vizualni oblici prikazivanja se dijele na slikovne, shematske i simboličke.

Slikovni (ikonički) prikazi sadržaje prikazuju vjerno poput fotografije. Njihova upotreba nije tako česta u nastavi matematike.

U *shematske* prikaze spadaju pojednostavljeni crteži, lišeni suvišnih detalja. Najčešći tipovi shematskih prikaza u školskoj matematici su *grafički* (grafovi funkcija, koordinatni sustavi, razni statistički grafikoni itd.) i *tabelarni* (tablice).

Simbolički prikazi obuhvaćaju matematičke simbole (npr. oznake za skupove, brojeve i ostale elemente skupova, računske operacije, jednadžbe itd.). Rad s računalom u simboličkom obliku pretpostavlja da, kao i u bilježnici, učenik dobro poznaje potrebno gradivo matematike iz tradicionalne nastave, hijerarhiju izvršavanja, ali i osnovne funkcije računala s kojim radi. Granice između vrsta prikaza nisu stroge, tako da se, primjerice, tabelarni prikaz može svrstati i pod shematski i pod simbolički prikaz.

Razne mogućnosti prikaza čine velik potencijal koji nam donosi računalom u nastavu jer su vizualni momenti i zornost (Dakić, 1993.) uvijek bili jako bitni za razumijevanje matematičkih ideja u procesu učenja i rješavanja problema. No, neki progra-

mi nam nude i još jedan važan korak dalje: imaju mogućnost ovisnosti jednog prikaza o drugom kao i mogućnost brzog prebacivanja iz jednog prikaza u drugi. Primjerice, promjenom parametara u simboličkom obliku neke funkcije mijenjat će se i njen grafički prikaz na zaslonu. Na taj način učenici lako sami mogu doći do zaključaka o svojstvima pojedinih funkcija i sl. Programi koji nude tu mogućnost prebacivanja prikaza su, primjerice, *GeoGebra* i CAS programi.

Dodajmo ovdje i mogućnost dinamike: radi se o svojstvu po kojem objekti i nakon izmjena zadržavaju svoja matematička svojstva i odnose. Mijenjanjem parametara iz simboličkog prikaza dinamično će se mijenjati i njegov pripadni grafički prikaz. Vrijedi i obratna mogućnost: mijenjanjem izgleda grafa funkcije mijenjat će se automatski i parametri u simboličkom prikazu. Ovakvu istodobnu mogućnost i dinamike i raznih prikaza ima program *GeoGebra*. Ova dinamika daje mogućnost kvalitetnog eksperimentalnog rada u nastavi geometrije, ali o tome više u sljedećem poglavlju.

1. RAZNI OBLICI PRIKAZA		
GRAFIČKI (npr. GeoGebra, The Geometer's Sketchpad, CAS)	SIMBOLIČKI (npr. CAS, GeoGebra)	TABLIČNI (npr. Excell, CAS)
2. PREBACIVANJE IZ JEDNOG PRIKAZA U DRUGI (npr. CAS, GeoGebra)		3. DINAMIKA (npr. GeoGebra, The Geometer's Sketchpad, Cabri)

I mnogi interaktivni alati imaju različite mogućnosti prikazivanja matematičkih sadržaja (posebice grafičkim prikazom). Radi se, primjerice, o web alatima, *Flash* animacijama, raznim grafičkim alatima, od kojih su neki i dinamični (primjerice, grafički alati su posebno zgodni za rotaciju trodimenzionalnih slika i sl., čime se razvija prostorni zor kod učenika).

Teško je zamisliti kako bi te promjene prikaza ili dinamiku prikazali u klasičnoj nastavi, i koliko bi nam vremena trebalo za isti cilj. Na taj način primjena računala povećava efikasnost nastave matematike. Naravno, navedene prednosti još uvijek nisu garancija za didaktički smislenu primjenu računala u nastavi matematike. Za to treba imati dobru teorijsku podlogu, jasno unaprijed postavljene ciljeve i dobro osmišljene i promišljene zadaće nastave matematike.

Eksperimentalan rad

Eksperimentalno učenje bi se općenito moglo opisati kao „aktivno, samostalno, otkrivajuće učenje koje prvenstveno cilja na razvoj intuitivnih predodžbi i ideja, te na dublje i opsežnije osnovno razumijevanje matematičkih koncepata.“ (Schneider, 2002.) U literaturi eksperimentalno učenje još nalazimo pod nazivljem *otkrivajuće, istraživačko, heurističko i sl.*

Eksperimentalan rad učenicima omogućuje samostalno otkrivanje svojstava, izražavanje vlastitih ideja, nošenje s vlastitim pogreškama i krivim putovima, te povećavanje vlastite odgovornosti. Takav rad se često odvija i u grupi ili u paru, čime se jača komunikacija i kooperacija među učenicima.

Eksperimentalan rad ima važno mjesto u metodici matematike zbog svoje uske povezanosti s **heurističkim strategijama i idejama**. Slavni metodičar Polya govori o dva aspekta matematike: s jedne strane matematika je stroga i sistematična deduktivna disciplina (takvu smo je upoznali kroz studij matematike), a s druge strane matematika je i eksperimentalna induktivna disciplina (za rješenje problema treba isprobavati mogućnosti, tj. "eksperimentirati" i djelovati intuitivno). "*Oba aspekta su stara koliko i matematika sama.*" (Polya). Naime, da bismo potpuno vladali nekim matematičkim znanjem, prvo trebamo imati određene pretpostavke, manje ili više racionalne. Dakle, prvo trebamo koristiti heurističko razmišljanje, pretpostavke i ideje kako bismo izgradili i pripremili dokaz. Stoga matematiku možemo shvatiti i kao svjesnu interakciju između heurističkih i egzaktnih postupaka, interakciju između indukcije i dedukci-

je, interakciju između eksperimenta i teorije (Schneider, 2002.).

Kažimo još nekoliko riječi o eksperimentalnom radu i upotrebi računala u nastavi matematike. Eksperimentalan rad se može provoditi kroz promjene raznih parametara u jednom prikazu (pri čemu se često promatra i učinak na zavisnom prikazu i donose zaključci) ili kroz razna ponavljanja računanja ili koraka konstrukcije (kako bi učenik vlastitim tempom i brojem ponavljanja uočio tražena svojstva ili fenomene te ih dublje razradio). Nadalje, kroz eksperimentalni rad na računalu učenik može više saznati o pojedinom matematičkom pojmu i njegovim karakteristikama (čest je primjer istraživanja svojstava raznih funkcija, poput monotonosti, simetričnosti, karakterističnih točaka i sl.), učenik može otkrivati matematička pravila i postupke (primjerice, pravila deriviranja ili integriranja, pravila računanja s izrazima itd.), učenik može promatrati i stvarati razne modele, simulacije i sl. Za modele i simulacije često se koriste razni interaktivni alati (*Flash*, web alati), ali i softveri dinamične geometrije, CAS i grafički alati.

No, upozorimo i na jednu zamku koja se može javiti kod eksperimentalnog učenja pomoću računala. U školskoj praksi se, naime, događa da učenici nakon što eksperimentalno utvrde određena svojstva ili ideje, *nemaju* potrebu za pravim matematičkim dokazom jer smatraju da je eksperiment koji su napravili dovoljan dokaz da uočeno pravilo vrijedi općenito. Stoga bi nastavnik, već prema dobi učenika, trebao brižljivo ukazati na potrebu za pravim matematičkim dokazom, tj. činjenici da heurističke ideje ipak nisu egzaktno provjerenе. U školskoj matematici to, naravno, ovisi o dobi učenika i predznanju, tako da se često zaista (opravdano) i zaustavljamo na heurističkim idejama i zaključcima. Sigurnosti pritom može dosta pridonijeti upotreba računala u nastavi matematike, mogućnost raznih prikaza, a posebno dinamika. No, učenicima bi i tada trebalo ukazati na potencijale i značenje pravog dokaza, kada god je to moguće.

Također, treba spomenuti da to što se dijelovi nastave odvijaju po heurističkim metodama, ne znači da je ta nastava bez plana, da nije sistematski

organizirana i da je bez cilja. Naprotiv, nastavnik treba dobro organizirati takav sat, poznavajući prikladne metode i mogućnosti računala. Nastavnik također treba procijeniti je li određeno gradivo prikladno za eksperimentalan rad, ili je prikladnije za neku drugu metodu ili nastavni oblik.

Elementariziranje

Kada su se kroz povijest rješavali matematički problemi, zbog (tadašnjeg) ograničenja u mogućnostima rješavanja složenih računa i postupaka pronalazile su se nove metode samo u svrhu lakšeg rješavanja. Taj se trend odrazio i u metodama i postupcima u nastavi matematike. Mogućnosti današnjih računala daju nam opet šansu da se vratimo prvobitnim ("elementarnim, primitivnim", Schneider 1999.) metodama koje su se prije činile prekomplikiranima, a današnja ih računala bez problema mogu svladati. Taj se postupak naziva *elementariziranje* (Schneider, 2002.). Također, računalo je omogućilo nesmetano računanje i bolje shvaćanje rekurzija. Schneider nalazi primjer za to u eksponencijalnoj funkciji, koja, gledana kao rekurzija, puno bolje objašnjava ideju eksponencijalnog rasta, nego što se to vidi iz njenog algebarskog prikaza, pa čak i grafa.

Modularitet

Modul je, prema Dörfleru, jedna više ili manje kompleksna i povezana jedinica generaliziranog znanja, koja se kao cjelina direktno može pozvati i primijeniti, bez eksplicitnog prikazivanja svojih koraka. *Modularitet*, tj. sposobnost direktnog pozivanja naredbi, bez zamaranja s koracima algoritma i postupcima izračuna, jest svojstvo o kojem se već dulje vrijeme diskutira u metodici nastave matematike. Metodičari, ali i nastavnici, se pitaju je li puko izvršavanje naredbi vrlina ili pak mana primjene računala u nastavi matematike. Mišljenja metodičara su podijeljena, diskusije koje se (još uvijek) vode su vrlo zanimljive te zalaze i u tzv. *Black Box / White Box* problem. Postavilo se pitanje je li didaktički opravdano učenicima servirati gotovu "naredbu" (modul, formulu) za rješanje nekog problema, ili bi učenici ipak trebali znati što se u toj "crnoj kutiji" događa, tj. razumiju li po-

stupak rješavanja. S druge strane, razumiju li zaista učenici svaki postupak koji im se u tradicionalnoj nastavi plasira kao obavezan? Primjerice, odakle formula za rješenja kvadratne jednadžbe, odakle postupak za množenje brojeva s potpisivanjem, odakle postupak za ručno vađenje drugog korijena itd. Ako učenici spomenute postupke i formule samo uče napamet, u čemu je to njihova prednost pred korištenjem gotove naredbe programa ili jednostavnog stiska tipke na kalkulatoru za množenje ili korijen? Stavovi oko ovih pitanja su podijeljeni, ali postoje i metodička rješenja koja se nude. Profesorica Schneider (2002.), kao i mnogi drugi metodičari, modularitet ipak stavlja pod pozitivne mogućnosti CAS-a, ali uz opširna obrazloženja problematike. U svakom slučaju, ovim se problemom otvaraju mnoga didaktička pitanja kojima bi trebalo posvetiti jedan cijeli članak u Miš-u, a čitatelju je sada dovoljno zaključiti da ova pitanja i dileme ukazuju koliko pažljivo treba promišljati za koji matematički sadržaj treba upotrijebiti računalo u nastavi, te koje metode pritom upotrijebiti.

U ovom prvom dijelu naglasak je stavljen na potencijale koje donosi računalo u nastavu matematike. U sljedećem nastavku bit će riječi o promjenama koje se događaju u nastavi matematike prilikom korištenja računala.

Literatura za 1. dio:

- [1] B. Dakić: ZORNOST U NASTAVI MATEMATIKE, Školske novine, Zagreb, 1993.
- [2] R. Fischer: HÖHERE ALLGEMEINBILDUNG, Sveučilišna skripta, 15 str., (neobj.).
- [3] E. Rac Marinić Kragić: KAKO ODREDITI GEOMETRIJSKO MJESTO TOČAKA, Državni seminar za nastavnike matematike, Opatija, 2008.
- [4] E. Schneider: CHANGES OF TEACHING MATHEMATICS BY COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS (CAS), Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1997, Osnabrück, Germany, 1999.
- [5] E. Schneider: COMPUTERALGEBRASYSTEME IN EINEM ALLGEMEINBILDENDEN MATHEMATIKUNTERRICHT, Didaktische Orientierungen – Praktische Erfahrungen, Profil Verlag, München-Wien, 2002.
- [6] Š. Šuljić: GEOGEBRA (2) – Prvi softver dinamične geometrije na hrvatskom jeziku, Matematika i škola, br. 29, Element, Zagreb, 2005.
- [7] Š. Šuljić: GEOGEBRA (6) – S dinamičnim crtežom na Internet, Matematika i škola, br. 33, Element, Zagreb, 2006.