

Meranski nastavni plan

iz 1905. godine



Dubravka Glasnović Gracin, Zagreb

Ideje i uvjerenja velikog Felixa Kleina o reformi nastave matematike u srednjoj školi bile su ugrađene u tzv. Meranski nastavni plan iz 1905. godine. Nastavni plan je nazvan tako po Meranu, tirolskom gradiću u današnjoj sjevernoj Italiji, a koji je tada pripadao Austro-

Ugarskoj Monarhiji. Upravo je u Meranu taj nastavni plan prezentiran 1905. godine na godišnjem susretu *Društva njemačkih prirodoslovaca i liječnika*, i on čini temelj mnogih današnjih nastavnih planova u Europi. Povrh toga, neke od ideja s Meranskog skupa i danas stoje kao (ne/dostižni) ideal u matematičkom obrazovanju općenito.

Felix Klein

Felix Christian Klein (1849. – 1925.), njemački matematičar poznat po doprinosima iz područja teorije grupa, teorije funkcija i neeuclidске geometrije, bio je vrlo aktivan i u području metodike nastave matematike. Predavao je razne grane matematike na sveučilištima u Erlangenu, Münchenu, Leipzigu i Göttingenu. U svom čuvenom Erlangenskom programu iz 1872. daje rješenje za klasifikaciju i karakterizaciju geometrija. Životopis Felixa Kleina s naglaskom na matematičku karijeru već je prikazan u MiŠ-u br. 25, a ovdje ćemo govoriti upravo o velikom Kleinovom doprinosu u području nastave matematike u srednjoj školi i na fakultetskoj razini.

Klein je na sveučilištu uvijek promovirao važnost prostornog zora i primjene matematike, te je ukazivao na važnost zbirke matematičkih modela i geometrijskih pomagala koju bi trebao imati i njegovati svaki matematički kabinet. Tako je Göttingenska zbirka postala vodeća zbirka matematičkih modela u Njemačkoj krajem 19. stoljeća, a uskoro je tamo otvoren i Institut za primijenjenu matematiku.

Osim fakultetske nastave, pokazao je interes i za nastavu matematike u srednjoj školi. Energičan i karizmatičan, Klein je promovirao korištenje tehnologije u nastavi matematike (i bio pionir u tome još krajem 19. stoljeća!), zalagao se za poticanje prostornog zora korištenjem raznih matematičkih modela i naprava, promovirao je primjenu matematike u svakodnevici, te sustavno uveo pojam funkcije

u nastavni plan i program iz matematike. Dotad je u nastavi matematike vladalo predavanje čiste matematike po uzoru na Euklidove *Elemente*, bez praktične primjene i bez dodira sa stvarnošću.

Kleinov autoritet i istinsko zanimanje za poboljšanja u nastavi matematike rezultirali su njegovim sudjelovanjem u nastanku prvog pravog opsežnog nastavnog plana iz matematike za srednje škole, u čijem nastajanju je upravo Klein sa svojim idejama odigrao ključnu ulogu. Bio je to tzv. Meranski nastavni plan.



Slika 1. Felix Klein

Konferencija u Meranu

Felix Klein bio je izabran za jednog od dvanaest članova komisije za izradu novog nastavnog plana iz matematike *Društva njemačkih prirodoslovaca i liječnika*. To društvo intelektualaca se već neko vrijeme brinulo za poboljšanja u nastavi matematike i fizike. Kleinove ideje bile su uključene u temeljni dokument reforme srednjoškolske nastave matematike, zvan Meranski nastavni plan (*Meraner Lehrplan*). Merano je grad (koji je tada pripadao Austriji, a danas se nalazi u sjevernoj Italiji) u kojem je taj plan prezentiran 1905. godine na godišnjoj konferenciji *Društva njemačkih prirodoslovaca i liječnika*, kao izvještaj sa sastanka Komisije od godinu dana ranije u Wroclawu.

Meranski program reforme naglašava radikalno novi pristup nastavi matematike: orijentiranje modernoj civilizaciji i primjeni tehnologija. Dotadašnja nastava matematike bila je orijentirana na teoriju i preopterećena algoritmima tako da su se koncepti i ideje izgubili u šumi rutinskih postupaka. Klein je tadašnju nastavu nazivao "umjetnom" jer nije sadržavala životne primjere, a nije bila ni pedagoški ni metodički obrađena. Veliki industrijski zamah iz

tog vremena trebao je primjenu matematike pa se Klein zalagao za "manje aritmetike i geometrije po Euklidu, već prije svega analiza".

Prema Meranskoj reformi, glavni cilj nastave matematike bio je razvijati sposobnosti *matematičkog* razmatranja fenomena u svijetu oko nas. Iz takvog cilja proizašle su dvije posebne zadaće nastave matematike:

- jačanje prostornog zora i
- odgoj za prilagodbu na funkcionalno razmišljanje.

Autori su željeli na kraju gimnazije dobiti učenika osposobljenog da matematizira situacije iz svakodnevice, zna sastavljati vlastite zadatke, te ima uvid o značenju matematike u prirodnim znanostima i u modernoj kulturi. Recimo sada nešto više o dvije spomenute zadaće: prostornom zoru i funkcionalnom razmišljanju.

Jačanje prostornog zora

Jačanje prostornog zora odnosilo se na primjenu vizualizacije u nastavi matematike, te upotrebu raznih modela i pomagala. Meranski plan bio je prvi opsežan program za srednje škole koji se zalagao za sustavnu upotrebu tehnologije i modela u svrhu vizualizacije. U planu se preporučaju mjerenja s primjenom tadašnje tehnologije i aparata, a mjerenje duljina se preporučalo raditi instrumentima na terenima izvan škole. Za vizualizaciju bi se koristili modeli u nastavi geometrije, a poticalo se i korištenje šibera.

Grafička prikazivanja ne bi koristila samo za razvijanje prostornog zora, već i za razvijanje tzv. *funkcionalnog mišljenja*: npr. razmatranja kako se mijenjaju vizualne komponente promjenom određene varijable.

Funkcionalno razmišljanje

Odgoj za prilagodbu na funkcionalno razmišljanje (*Funktionales Denken*) se odnosio na matematičko razmatranje promjena, sposobnost matematiziranja

situacija iz života, njihovog formaliziranja i promatranja okoline na matematički način. Misli se na sustavno promišljanje o funkcijskim odnosima, ali i o fenomenu promjene općenito (npr. u geometriji). U prijevodu Meranskog plana¹ koji se nalazi u prilogu ovom članku, **plavom bojom** označeni su ciljevi vezani za funkcionalno razmišljanje. Ovaj termin je po prvi puta korišten u Meranskom planu, a u 1980-ima opet se govori o funkcionalnom razmišljanju, ali ne više samo u ovim okvirima. Funkcionalno mišljenje u njemačkoj didaktici matematike danas označava tipične načine razmišljanja prilikom rada s pojmom funkcija (Hoffkamp, 2009.). Ideja funkcijske ovisnosti je jedna od ključnih kompetencija u svim suvremenim matematičkim kurikulumima.

Funkcije

Uvođenje funkcija i pristup funkcijama u Meranskom planu je ostavio najviše traga u europskoj nastavi matematike. Funkcije su za Kleina sredstvo kojim se prikazuju promjene, i zato bi po njemu funkcija trebala biti ključni pojam srednjoškolskog i visokog matematičkog obrazovanja. Iz priloga se jasno vidi da se pojam funkcije stupnjevito i vrlo promišljeno proteže kroz sve razrede te da je funkcija centralni pojam plana. Ovaj jaki naglasak na funkcijama je jedan od sadržajno najvažnijih momenata u Meranskoj reformi.

Ovdje su diferencijalni i integralni račun ušli u nastavni plan jer po Kleinu ova područja spadaju u opće matematičko obrazovanje i bez njih se ne mogu prikazati znanstvena objašnjenja zakonitosti iz prirode.

Genetička nastava matematike

U prethodnom poglavlju vidjeli smo da je Meranska reforma donijela mnogo promjena u matematičkom sadržaju (uvedene su funkcije kroz sve stupnjeve gimnazijskog obrazovanja, uvedena je analiza u više stupnjeve srednje škole, uveden je im-

perativ primjene matematike i sl.). No, osim u sadržaju, Meranski plan donosio je revolucionarne ideje i na polju novih metoda i didaktičkih pristupa. Osim pojma vizualizacije kao novog metodičkog imperativa, uveden je i tzv. genetički pristup učenju gradiva (tada je u nastavi matematike u srednjim školama, a posebice na fakultetima prevladavao logičko-deduktivni pristup).

Felix Klein je imao točne zamisli o tome kako učenici i studenti trebaju učiti matematičke pojmove i ideje: kroz tzv. genetičku nastavu. Kod obrade novog gradiva učenika treba uvijek upućivati na prethodna (genetička) iskustva i povijesna saznanja ljudi vezano uz tekuću temu, tako da se staro gradivo poveže s novim kako bi se moglo ostvariti novo znanje. Tek na kraju bi se prešlo na sistematizaciju, aksiomatizaciju i formaliziranje. Matematički jezik bi također došao tek na kraju, ali prvo i najvažnije je **ideja**.

Primjerice, genetička nastava matematičke analize prati čovjekovo usvajanje stručnih pojmova kroz razne povijesne epohe. Kleinu su povijesni aspekti bili jako važni jer bi na taj način učenici bolje razumjeli pojmove matematičke analize.

No, ideja primjene genetičke nastave u razredima ipak nije masovno zaživjela. Neki od glavnih razloga za to su političke prilike u Europi u prvoj polovici 20. stoljeća, zatim Prvi svjetski rat, velika inflacija u Njemačkoj itd. U nastavi matematike je u međuvremenu zavladao analitička primjena krivulja. Više se tu nije radilo o uvođenju ideja iz analize, već se nastava pretvorila u mašineriju algoritama i rutina. U takvoj nastavi učenici trebaju slijediti algoritam za izračunavanje prvih, drugih i trećih derivacija funkcija, nultočaka, ekstrema, monotonosti, infleksija i sl. – a što svi ovi pojmovi znače, i što imaju zajedničko s naučenim algoritmima, malo tko od učenika zapravo zna objasniti, niti se to od njih traži. Uz to, spomenimo da se izvan matematičke učionice takvi postupci ne koriste, dakle nema govora o nekoj primjeni naučenog.

Ipak, kako su Kleinove ideje bile prekvalitetne da bi ih se samo tako zaboravilo, njemački matematičar

¹ Radi se o slobodnom prijevodu autorice.

Otto Töplitz napisao je tridesetih godina dvadesetog stoljeća udžbenik iz matematičke analize koji prati genetičku ideju nastave matematičke analize.

Töplitz je radio na Sveučilištu u Göttingenu zajedno s Felixom Kleinom. Zalagao se za Kleinove reformatorske ideje u nastavi matematike, a posebno za genetičku metodu, po kojoj je i predavao na sveučilištu. Genetičku metodu je još poboljšao, te je prije Drugog svjetskog rata napisao udžbenik *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung (Razvoj infinitezimalnog računa)* koji slijedi genetičku metodu i koncentrira se na matematičke ideje u višoj matematici. Kako je bio Židov, prije rata je pobjegao u Palestinu, ali ubrzo je umro od tuberkuloze. Njegova knjiga objavljena je posthumno 1949. godine, a engleski prijevod izdan je 1963. pod nazivom *The calculus: a genetic approach*.

Nekad i danas

Meranski plan iz 1905. bio je prvi opsežan i cjelovit nastavni plan za matematiku. Svi kasniji planovi zapravo su revidirani Meranski planovi. On se tiče i naše nastave matematike jer je Hrvatska tada bila dio Austro-Ugarske Monarhije, a to je bio period ključan za formiranje obrazovnih politika u europskim zemljama.

Meranska reforma iznjedrila je neke revolucionarne ideje vezane uz nastavu matematike. Primjerice, ideje i koncepti stavljeni su u prvi plan pred rutinskim postupcima, prostorni zor, korištenje modela i vizualizacija stavljeni su također u prvi plan pred suhoparnim predavanjima, primjena je stavljena uz bok teoriji, promovirana je genetička metoda, funkcije su sustavno i promišljeno uklopljene u obrazovnu vertikalu itd.

Iako neke od Kleinovih kvalitetnih ideja iz Meranskog nastavnog plana nisu dugoročno zaživjele (poput genetičkog pristupa) i iako su neke zastarjele (upotreba konkretnih pomagala poput šibera i sličnih koji se danas više ne koriste, te primjene vezane uz tadašnje industrijsko društvo i sl.), ipak se posljedice Meranske reforme osjećaju do danas. Neke Kleinove težnje i danas su aktualne, poput



Slika 2. Otto Töplitz



Slika 3. The calculus: a genetic approach

primjene modela i tehnologije u nastavi matematike, vizualizacije, matematizacije i sl.

U Meranskom planu posebno zadivljuje pristup funkcijama, dinamici i fenomenu promjene. Taj pristup je s jedne strane ambiciozan i ozbiljan, a s druge strane tako prirodan i nenametljiv. U usporedbi s aktualnim hrvatskim Nastavnim planom i programom koji prikazuje jedan iskasapljeni pristup pojmu funkcije, čovjek se zapita ne bismo li trebali biti pametniji, organiziraniji, i s boljim uvidom u stvari dugih 105 godina nakon donošenja Meranske reforme.

Na kraju ne zaboravimo reći da je Klein bio svjestan da primjena novih ideja iz reforme, a pogotovo primjena tehnologije u nastavi matematike najviše ovisi o **obrazovanosti nastavnika**. Stoga je izobrazba budućih nastavnika bila polazna točka Kleinove reforme, što bi trebala biti polazna točka i svake današnje ozbiljnije reforme u nastavi matematike.

Širina i dubina Kleinovih ideja, njegova energija, briljantan um te briga za nastavu matematike i danas očaravaju, uistinu motiviraju i potiču suvremene metodičare na proučavanje Meranskog nastavnog plana.

U prilogu se nalazi cijela vertikala Meranskog nastavnog plana iz 1905. godine.

Meranski nastavni plan (1905.)²

A. Unterstufe (Niža gimnazija)

Sexta

Osnovne računске operacije. Njemačke mjere, utezi i novac. Vježbe s decimalnim zapisom i s jednostavnim decimalnim računima kao priprema za računanje s razlomcima.

Quinta

Računanje: Nastavak vježbi računanja s decimalnim brojevima, ali s proširenjem na primjenu na mjere jedinice (uključujući strane utege i novac), mjerjenja duljina raznih vrsta (također na terenu); najjednostavniji zadaci s ravninskim i prostornim računanjem uz primjenu odnosa između obujma i utega. (Kod svih takvih računanja uvijek prvo treba napraviti procjenu reda veličine rezultata). Djeljivost brojeva. Neskrativi razlomci (prvo kao konkretne vrijednosti).

Priprema za nastavu geometrije: Uvod u osnovne pojmove shvaćanja prostora, ali takve vrste da prostor izgleda pretežno kao nosač planimetrijskih odnosa. Prostorna rastezanja, plohe, pravci i točke ponajprije objašnjeni iz svakodnevice i potvrđeni na različitim tijelima. Ravninske likove prvenstveno treba prikazati kao dijelove plašta tijela, zatim kao samostalne tvorevine na kojima treba razumjeti pojmove smjera, kuta, paralelnosti i simetrije. Vježbanje korištenja ravnala i šestara, marljivog crtanja i mjerjenja.

Quarta

Računanje: Rastavljanje decimalnih razlomaka. Skraćeno računanje (na najjednostavnijim primjerima). Pravilo trojno s izbjegavanjem shematskih formi. Procjena. Zadaci iz građanskog života, posebice jednostavni slučajevi postotnog računa (kamate, rabat). Priprema nastave aritmetike kroz ponavljanje prije riješenih prikladnih zadataka, ali s primjenom na slova umjesto na brojeve. Tumačenje dobivenih slovnih izraza i analiziranje tih izraza kroz umatanje određenih brojevinih vrijednosti. Povezanost računa iz glave s računanjem zagrada.

Geometrija: Nauk o pravcima, kutovima i trokutima. Dinamika likova; ovisnost dijelova trokuta jednog od drugog; prijelazni slučajevi (pravokutan trokut, jednakokrčan trokut, jednakostričan). Jednostavni teoremi o paralelogramu koji polaze iz konstrukcije.

Untertertia

Aritmetika: Sustavna povezanost osnovnih pravila računanja kroz formule sa slovima. Pojam odnosnih veličina razvijen na praktičnim primjerima i prikazan na beskonačno protežućem brojevnom pravcu. Pravila računanja za odnosne veličine. Nastavak s vježbama u analiziranju slovnih izraza pri uvođenju negativnih brojeva i sa stalnim naglašavanjem funkcionalnog karaktera nadolazećih promjenjivih veličina. Primjena na jednostavne i složene jednadžbe prvog stupnja s jednom nepoznicom. Razlika između identiteta i uvjetnih jednadžbi.

Geometrija: Širenje nauka o paralelogramu. Trapez. Fundamentalni teoremi o krugu. Promatranje utjecaja koje vrši promjena veličine pojedinih dijelova lika na cjelokupni karakter lika.

Obertertia

Aritmetika: Dopunjenje i proširenje računanja sa slovima, osobito rastavljanje polinoma. Najjednostavniji teoremi o proporcijama. Jednostavne i složene jednadžbe prvog stupnja s jednom varijablom. Ovisnost izraza s veličinama o jednoj varijabli. Grafički prikaz jednostavnijih linearnih funkcija i primjena tih prikaza na rješavanje jednadžbi.

Geometrija: Uspoređivanje površina i računanje površina; računanje zakrivljenih omeđenih dijelova ravnine metodom približavanja. Ponavljanje geometrijskih računanja iz Quinte. Zadaci kao u Untertertiji.

Untersekunda

Aritmetika: Potencije i korijeni. Jednostavne i složene jednadžbe drugog stupnja s jednom nepoznicom. Veza između koeficijenta i korijena jednadžbe. Promatranje kvadratnog izraza s jednom varijablom i njegove uvjetne promjenjivosti na grafičkom prikazu. Rješavanje zadataka drugog stupnja kroz presjeke pravca i parabole. Promatranje grafičkih prikaza kao sredstva za zorni prikaz empirički pronađenih odnosa.

Geometrija: Učenje o sličnosti s posebnom primjenom položaja sličnosti. Proporcije na krugu. Računanje opsega i površine kruga približavanjem s mnogokutima. Iscrpno promatranje obostrane ovisnosti razmjera stranica i vrijednosti kuta kod trokuta, posebno kod pravokutnog. Postavljanje i testiranje tablica za tu ovisnost (kao priprema za trigonometriju), u dodatku praktični zadaci iz tog područja (rad na "mjernom stolu").

B. Oberstufe (Viša gimnazija)

Obersekunda

Aritmetika: Proširenje pojma potencija, shvaćanje potencije kao eksponencijalne veličine, pojam i primjena logaritma. Aritmetički nizovi prvog reda i geometrijski nizovi, primjena geometrijskih nizova na kamatni i rentni račun (na jednostavnijim zadacima preuzetim iz stvarnosti). Grafički prikaz obostranih ovisnosti anti-logaritma i logaritma. Šiber. Rješavanje kvadratnih jednadžbi s dvjema nepoznicama kako kroz računanje tako i preko grafičkog prikaza.

Geometrija: Trigonometrija i njena veza s konstruktivnom planimetrijom. Primjena na praktične zadatke s trokutom i četverokutom. Karakteriziranje obostranih ovisnosti između promjene kuta i promjene vrijednosti funkcije kroz geometrijske formule; grafički prikaz ovih ovisnosti. Baratanje prikladnim zadacima na više načina, konstruktivno i s dodatkom računa. Restrikcija na harmonijske odnose i na osnove novije geometrije kao završetak planimetrije.

Unterprima

Aritmetika: Promatranje toka dosad naučenih funkcija obzirom na rast ili pad (s eventualnim uvođenjem pojmova diferencijalnog kvocijenta i integrala), s korištenjem brojnih primjera iz geometrije i fizike, posebno mehanike. Najjednostavniji teoremi kombinatorike s primjerima za vježbu.

Geometrija: Stereometrija pri čemu se uzimaju u obzir najvažniji elementi nastave projekcijskog crtanja. Vježbe stereometrijskog crtanja. Najjednostavniji teoremi sferne trigonometrije. Matematička geografija, obuhvatno s učenjem projekcija na karti.

Oberprima

Učenje o presjecima stošca kako analitičkim tako i sintetičkim postupcima, s primjenom na elemente astronomije. Ponavljanje cijelog gradiva školske matematike, rješavanje kompleksnijih zadataka koji se trebaju rješavati zajedno računom i crtanjem. Osvrti na gradivo gledano s povijesnog i filozofskog stanovišta.

Izvor: Der Meraner Lehrplan für Mathematik (1905), Wiederabdruck in: Klein, Felix und Schimmack, Rudolf: Der mathematische Unterricht an höheren Schulen, Teil 1: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts, S. 213–216.

² Tadašnja gimnazija trajala je 9–10 godina s razredima koji su se brojali unatrag, počevši od šestog (sexta) do najvišeg prvog razreda (prima). Pritom je treći i drugi razred trajao po dvije godine, a posljednji, prvi razred, čak tri godine.