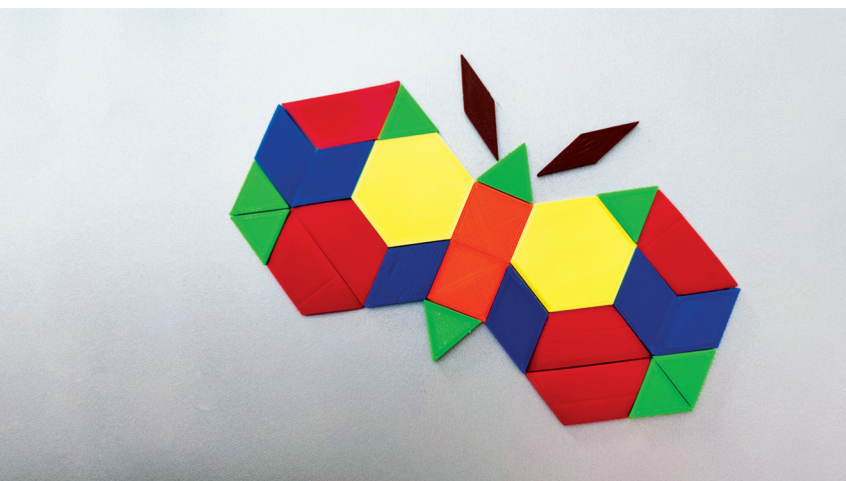


Šest veličanstvenih

Geometrijske pločice – jednostavno učilo s bezbroj mogućnosti



*Aleksandra Čižmešija i
Sanja Stilinović, Zagreb*

Ovo je prvi u nizu članaka u kojima predstavljamo geometrijske pločice kao primjer moćnog, a jednostavnog i svima dostupnog matematičkog učila, ali još uvijek nedovoljno prisutnog u našoj nastavnoj praksi. Nakon teorijskog uvoda i opisa geometrijskih pločica, na konkretnim primjerima grupnih i individualnih učeničkih aktivnosti pokazujemo njihov veliki potencijal pri učenju i poučavanju matematike u osnovnoj i srednjoj školi te povezivanju različitih sadržajnih područja, tj. domena matematičkog kurikuluma. Započinjemo geometrijom, a ovog puta u fokusu nam je primjena geometrijskih pločica pri učeničkoj izgradnji osnovnih pojmova i odnosa ravninske geometrije, osobito kutova.

1. Matematička kompetencija i aktivna nastava matematike

Kao jedna od ključnih kompetencija za cjeloživotno učenje, matematička kompetencija predstavlja spo-

sobnost razvijanja i primjene matematičkog mišljenja i pristupa kako bi se riješio niz problema u svakodnevnoj situaciji (European Commission 2019.). Uz vještinu prilagodljivog i preciznog izvođenja učinkovitih i primjerenih matematičkih postupaka (proceduralnu spretnost), ona podrazumijeva i ovladanost matematičkim konceptima, operacijama i

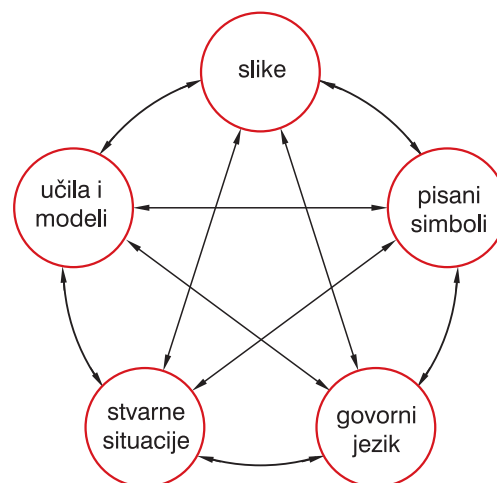
prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija, Sveučilište u Zagrebu Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, cizmesij@math.hr
Sanja Stilinović, prof., Osnovna škola Augusta Šenoe, Zagreb, sanja.stilinovic@skole.hr

relacijama (konceptualno razumijevanje), sposobnost oblikovanja, prikazivanja i rješavanja matematičkih problema (stratešku kompetenciju), kao i sposobnost logičkog mišljenja i refleksije te matematičkog objašnjavanja, argumentiranja i dokazivanja (prilagodljivo rasuđivanje). Konačno, nezabilazan aspekt matematičke kompetencije predstavlja i pozitivan stav prema matematici kao smisljenoj, korisnoj i vrijednoj ljudskoj aktivnosti, zajedno s povjerenjem u vlastiti matematički rad i učinkovitost (produktivna dispozicija) (National Research Council 2001.).

Suvremeni matematički kurikulumi širom svijeta promiču nužnost razvoja svih navedenih dimenzija matematičke kompetencije, s osobitim naglaskom na učeničko konceptualno razumijevanje matematike kao suprotnosti tradicionalnom reduciranju matematičke pismenosti na proceduralnu spretnost. Njihovu zajedničku potku predstavlja i uvažavanje temeljnog postulata konstruktivističke teorije učenja – ideje o učenicima kao aktivnim konstruktorima, tj. kreatorima i graditeljima vlastitog matematičkog znanja te postavljanje učenika u središte obrazovnog procesa u skladu s njime. To znači da nastavnik više nije prenositelj znanja, već umjesto toga treba preuzeti ulogu facilitatora pri konstrukciji znanja svih svojih učenika. Teorijsku podršku učinkovitoj organizaciji nastavnog procesa daje i sociokulturalna teorija učenja, koja, uz angažman samog učenika, značajan utjecaj na učenje pridaje njegovoj socijalnoj interakciji s nastavnikom i drugim učenicima te kulturi nastave matematike i škole kao institucije. Radovi psihologa J. Piageta i L. Vigotskog iz prve polovine 20. stoljeća, začetnika ovih dviju teorija učenja, značajno su utjecali na matematičko obrazovanje u cijelom svijetu, a i dalje kontinuirano potiču nova istraživanja velikog broja znanstvenika (za više informacija pogledati npr. u Van de Walle, Karp i Bay-Williams 2010., str. 20–23).

Budući da se u gotovo svakom razrednom odjelu nalaze učenici različitih obrazovnih potreba te stilova i brzina učenja, u nastavi je nužno koristiti raznovrsne strategije poučavanja kako bi od nje koristili mogli imati svi učenici. Da bi razvili konceptualno i tzv. relacijsko razumijevanje matematike (Skemp,

2006.), tj. izgradili bogatu i povezanu mrežu matematičkih koncepata i postupaka te u svakoj matematičkoj aktivnosti bili u stanju odgovoriti na pitanje što rade i zašto, u nastavnom procesu učenicima treba pružiti što je moguće više prilika za samostalno individualno i timsko istraživanje, eksperimentiranje, naslućivanje, otkrivanje, oblikovanje, prikazivanje, opisivanje, objašnjavanje, argumentiranje, provjeravanje, potvrđivanje, dokazivanje, odbacivanje ili opovrgavanje te razvoj i primjenu matematičkih ideja, kao i za zaključivanje o njima. Kako bi broj i kvaliteta uspostavljenih veza između nove i već postojećih ideja bili što veći, učenicima je važno dati priliku da o istoj matematičkoj ideji, odnosno konceptu, razmišljaju i predstavljaju je na perceptualno različite načine (Dienes, 1969.). Lesh, Post i Behr (1987.) identificirali su pet različitih načina prikazivanja, odnosno predstavljanja (reprezentacije) matematičkih koncepata (slika 1). Njihovo je istraživanje pokazalo da učenici koji imaju poteškoće u prevođenju koncepta iz jednog prikaza u drugi imaju poteškoće i pri rješavanju matematičkih problema te razumijevanju računskih operacija i računanja. Prema tome, jačanje sposobnosti fleksibilne promjene prikaza pozitivno utječe na učeničko razumijevanje matematičkih koncepata, ali i na njihovu retenciju (Van de Walle, Karp i Bay-Williams 2010., str. 27).



Slika 1. Pet različitih načina predstavljanja matematičkih ideja prema Lesh, Post i Behr (1987.)

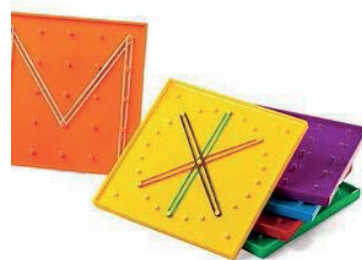
2. Matematički modeli i učila – podrška konceptualnom razumijevanju matematike

Jedan od pet različitih načina predstavljanja matematičkih ideja i koncepata na slici 1 su modeli i učila. Pritom termin **model za matematički koncept** označava bilo koji objekt, sliku ili crtež koji predstavlja taj koncept ili na kojem se mogu prepoznati odnosi i veze koje taj koncept ima s drugim matematičkim konceptima (Van de Walle, Karp i Bay-Williams 2010., str. 27). To su, primjerice, modeli duljine te površine kruga i pravokutnika za koncept razlomka, model temperature za koncept cijelog broja te model vage jednakih krakova za koncept jednakosti dvaju realnih brojeva, dobro poznati u nastavi matematike u našim osnovnim školama. S druge strane, **matematička učila** (engl. *manipulatives*) su fizički objekti dizajnirani tako da eksplicitno i konkretno predstavljaju apstraktne matematičke ideje. Vizualno su i taktilno privlačni, a učenici njima mogu baratati u različitim praktičnim iskustvima učenja (Moyer 2001.). Poučavanje uz pomoć učila ima dugu povijest i tradiciju u nastavi matematike. Započelo je uporabom prikladnih objekata uzetih direktno iz prirode, poput kamenčića i raznih plodova, koji su s vremenom zamijenjeni naprednijim predmetima, npr. kockicama te razlomčkim i postotnim krugovima, ali i digitalnim tehnologijama (npr. alatima dinamične geometrije) u suvremenim matematičkim učionicama. Neka od danas svjetski najpoznatijih matematičkih učila su: Cuisenaireovi štapići (slika 2), geoplоче (slika 3), dekadске kockice (slika 4) te algebarske (slika 5) i geometrijske pločice (slika 6). Mogu se izraditi vlastoručno ili kupiti kao komercijalni proizvodi na tržištu didaktičkih materijala. Najčešće su napravljena od plastike ili drveta, a u novije su vrijeme na internetu dostupne i njihove interaktivne virtualne verzije.

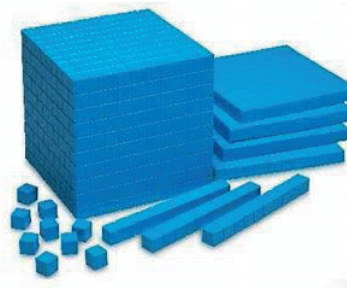
Uporaba fizičkih objekata i slikovnih prikaza u učenju i poučavanju matematike znanstveno je dobro istražena iz različitih perspektiva. Zagovaraju je mnogi znanstvenici već od 19. stoljeća



Slika 2. Cuisenaireovi štapići



Slika 3. Geoplоче



Slika 4. Dekadske kockice



Slika 5. Algebarske pločice



Slika 6. Geometrijske pločice

i poznatog pedagoga J. H. Pestalozzija, a osobit uzlet dobila je razvojem i etabliranjem konstruktivističkih teorija učenja tijekom šezdesetih i sedamdesetih godina 20. stoljeća. Piaget (1952., 1970.) sugerira da djeca ne posjeduju mentalnu zrelost za razumijevanje apstraktnih matematičkih koncepata ako su im predstavljeni samo riječima ili simbolima (objašnjavanjem i predavanjima), već su im za ovladavanje njima potrebna mnoga iskustva učenja s modelima i instrumentima. To potvrđuje i Bruner (1960., 1986.), zalažući se za uvođenje novih koncepata i postupaka postupnim *blijedenjem konkretnosti* u korist apstraktnosti, i to u tri međusobno povezane progresivne faze: (1) *enaktivnoj*, u kojoj su koncepti i postupci predstavljeni s pomoću fizičkih, konkretnih objekata, uključujući učila; (2) *ikoničkoj*, u kojoj se koriste slikovni i grafički prikazi; te, konačno, (3) *simboličkoj*, s apstraktnim prikazima (npr. matematičkim simbolima). Učila i drugi dobro razumljivi konkretni fizički objekti učenicima pritom pomažu u tumačenju dvosmislenih ili nejasnih apstraktnih simbola, stjecanju utjelovljenih perceptivnih i fizičkih iskustava kao temelja za apstraktno razmišljanje, kao i stvaranju zalihe konkretnih slika koje mogu upotrijebiti zaborave li značenje apstraktnih simbola ili ih ne mogu povezati s pripadajućim matematičkim konceptima ili postupcima. S druge strane, nastavniku omogućavaju stjecanje boljeg uvida u učenikovo matematičko razumijevanje. Prema Bruneru, učenike treba usmjeravati prema postupnom odbacivanju konkretnih svojstava fizičkih i ikoničkih prikaza koja su nevezana za proučavani matematički koncept te uočavanju generičkih i općenitih matematičkih svojstava tog koncepta (Fyfe i sur. 2014.). Ovaj su pristup prihvatili i mnogi drugi istraživači (npr. Freudenthal 1973., 1991.; Fyfe i sur. 2014.; Gravemeijer 2002.; Lesh 1979.; Skemp 1987. itd.) teorijski ga nadograđujući, profinjujući i modificirajući na različite načine.

Uporabu učila kao učinkovitog alata za poticanje razumijevanja apstraktnih matematičkih koncepata i podršku rješavanju problema, osobito za slabije učenike, podupiru i mnogobrojna kasnija istraživanja (Ball 1992.; Furner i Worrell 2017.; Golafshani 2013.; Moyer 2001.; Sowell 1989.; Thompson

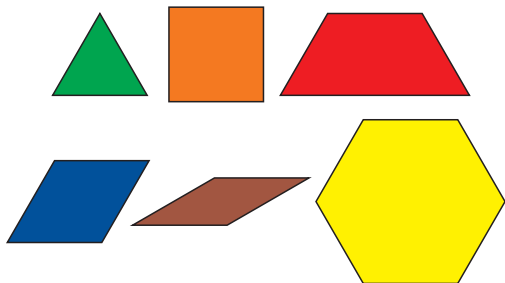
i Lambdin 1994. itd.). Međutim, znanstvenici ukazuju i da je pri primjeni fizičkih objekata u nastavi potreban oprez jer često sadržavaju perceptivne detalje koji učenika mogu odvratiti od relevantnih informacija (npr. Belenky i Schalk 2014.), skretati mu pažnju na sebe same umjesto na matematički koncept koji predstavljaju (npr. Uttal i sur. 1997.) i ograničiti mu prijenos znanja na nove problemske situacije (npr. Goldstone i Sakamoto 2003.). Sama po sebi, učila nisu nositelji matematičkog značenja i pristupa, već im ga daju nastavnici dizajnom svog poučavanja (Ball 1992.). Istraživanja pokazuju da značajan utjecaj na načine na koje nastavnici koriste učila u nastavnom procesu, kao i na razloge zbog kojih to rade upravo tako, imaju njihova uvjerenja o tome kako učenici uče matematiku, što vrijedi čak i za nastavnike koji su naučili primjerene strategije korištenja učila u poučavanju (Furner i Worrell 2017.; Moyer 2001.; Moyer i Jones 2004.; Ndlovu i Chiromo 2019.). Stoga je važno još jednom istaknuti da konkretni fizički materijali i učila u nastavnom procesu ne bi trebali služiti za nastavnikovu demonstraciju apstraktnih matematičkih koncepata na konkretnim modelima te za igru, zabavu i kao "naprava za odgovore" za učenike, već kao svrsishodna podrška te poticaj pri učeničkoj izgradnji razumijevanja apstraktnih matematičkih koncepata i postupaka.

Konačno, novi moment u obrazovanju donijele su i virtualne inačice tradicionalnih učila, npr. internetske biblioteke *National Library of Virtual Manipulatives* (Utah State University, dostupno na <http://nlvm.usu.edu/>), *Illuminations* (National Council of Teachers of Mathematics, dostupno na <https://illuminations.nctm.org/>) i dr. Iako su zadržale interaktivnost svojih fizičkih predložaka, značajno su utjecale na promjene u organizaciji poučavanja i učenja, a time ujedno otvorile i novo poglavlje u znanstvenim istraživanjima matematičkog obrazovanja. S obzirom na njenu kompleksnost, a time i nužnost sustavnog pristupa, temu uporabe virtualnih učila u nastavi matematike ostavljamo za neki drugi put i nastavljamo dalje s fizičkim materijalima. Učinkovitu uporabu takvih učila ilustriramo na primjeru geometrijskih pločica kao jednostavnog učila s velikim potencijalom za učenje i poučavanje matematike.

3. Geometrijske pločice

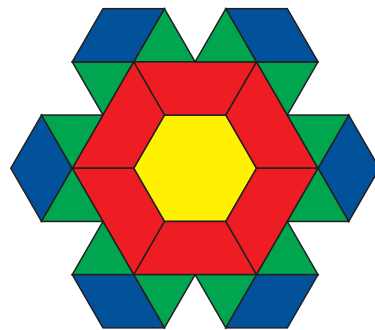
Geometrijske pločice (engl. *pattern blocks*) su učilo koje čine tanke plastične ili drvene pločice te predstavljaju ovih šest geometrijskih likova u više sukladnih primjeraka (slika 7):

- **jednakostranični trokut** sa stranicama duljine 25 mm
- **kvadrat** sa stranicama duljine 25 mm
- **jednakokrani trapez** s osnovicama duljina 50 mm i 25 mm, krakovima duljine 25 mm te unutarnjim kutovima veličina 60° i 120°
- **romb** sa stranicama duljine 25 mm i unutarnjim kutovima veličina 60° i 120°
- **romb** sa stranicama duljine 25 mm i unutarnjim kutovima veličina 30° i 150°
- **pravilni šesterokut** sa stranicama duljine 25 mm.



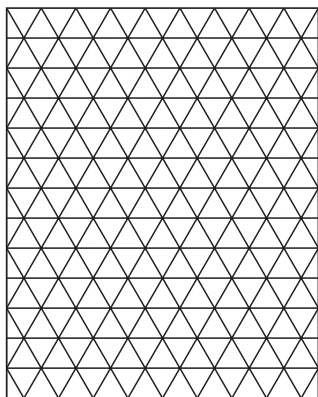
Slika 7. Šest osnovnih geometrijskih pločica

Važno je uočiti jednakost duljina svih stranica ovih likova osim jedne osnovice trapeza koja je od njih dvostruko dulja, kao i da su svi unutarnji kutovi ovih likova višekratnici od 30° , što je dvanaestina punog kuta. Uz jednostavne veze među površinama geometrijskih pločica (npr. trokut, trapez i romb s unutarnjim kutom od 60° su redom šestina, polovina i trećina šesterokuta), ova svojstva omogućavaju i druga popločavanja pločica jednih drugima te stvaranje složenijih likova i popločavanje (dijelova) ravnine nadovezivanjem pločica jednih na druge (slika 8).

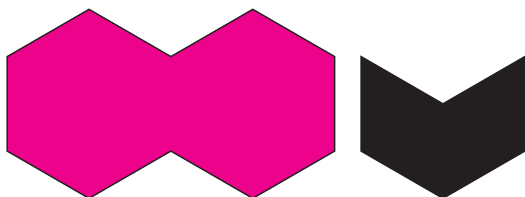


Slika 8. Složeniji lik sastavljen od geometrijskih pločica

Geometrijske pločice razvijene su u Centru za razvoj obrazovanja (engl. *Education Development Center*) iz Newtona, Massachusetts, u SAD-u. Osmislio ih je Edward Prenowitz 1963. godine i zajedno sa suradnicima razvio ideje za učeničke aktivnosti s njima te eksperimentalno istražio učinkovitost njihove primjene u nastavi. Po uzoru na Cuisenaireove štapiće, svaka je pločica obojena svojom prepoznatljivom bojom: trokut zelenom, kvadrat narančastom, trapez crvenom, šesterokut žutom, romb s unutarnjim kutom od 60° plavom, a onaj s kutom od 30° smeđom bojom. Stoga se, u primjeni, pločice najčešće i nazivaju prema bojama, npr. plavi ili smeđi romb. Iako su one, kao fizički objekti, trodimenzionalni geometrijski oblici (uspravne prizme), važno je da njihova visina bude zanemariva u odnosu na ostale dimenzije, no dovoljna da djeca njima mogu lako rukovati. Komercijalni plastični i drveni proizvodi standardno su debljine 5 mm, a u radu s pločicama djeci je važno naglasiti da je fokus na likovima koji su osnove ovih geometrijskih tijela, a ne na trećoj dimenziji. U nedostatku komercijalnih proizvoda geometrijske pločice nije teško napraviti od kartona ili plastificiranog papira. Paket pločica za pojedinog ili skupinu učenika treba sadržavati onoliko međusobno jednakih, odnosno različitih pločica koliko ih je potrebno za istraživanje i eksperimentiranje u danoj problemskoj situaciji, a *osnovnim kompletom* nazivamo onaj koji sadrži po jedan primjerak svake od šest osnovnih pločica (slika 7). U ikoničkoj fazi izgradnje matematičkih koncepata učenicima pomaže i mreža jednakostraničnih trokuta dimenzija jednakih dimenzijama zelene pločice, tzv. trokutasta mreža (slika 9). U novije vrijeme su uz standardnih šest pločica, na tržištu



Slika 9. Trokutasta mreža



Slika 10. Dodatne geometrijske pločice

dostupne i dodatne geometrijske pločice, npr. rozi “dvostruki” šesterokut i crni “dvostruki” romb s kutom od 60° , stranica duljine 25 mm (slika 10).

Iako vrlo jednostavne, geometrijske pločice su učilo s ogromnim potencijalom u nastavi matematike. Može ih se upotrijebiti za učeničke aktivnosti u razvoju razumijevanja matematičkih konceptata i rješavanje problema u svim područjima školske matematike i njihovu povezivanje, npr. za istraživanje: osnovnih geometrijskih odnosa i veza (uključujući sastavljanje i rastavljanje geometrijskih oblika), svojstava kutova i mnogokuta (uključujući simetriju), duljina i površina (uključujući opseg i upotrebu nestandardnih mjernih jedinica), geometrijskih transformacija ravnine i njihovih kompozicija, sličnosti i sukladnosti, popločavanja ravnine, razlomaka (uključujući njihovu ekvivalenciju i uspoređivanje te operacije s njima), varijabli, algebarskih izraza i jednažbi te različitih matematičkih pravilnosti (uključujući periodičnost te linearnu i kvadratnu ovisnost).

4. Geometrijske pločice i osnovni geometrijski pojmovi i odnosi

Predstavljanje bogatstva mogućnosti ovog učila započinjemo geometrijom, i to osnovnim pojmovima i odnosima ravninske geometrije. Dajemo niz primjera učeničkih aktivnosti za istraživanje o geometrijskim pločicama i s pomoću njih, rješavanje problema i matematičku komunikaciju. U prvih nekoliko aktivnosti učenici se upoznaju s učilom, uočavaju i komuniciraju osnovna geometrijska svojstva te međusobne sličnosti pločica i razlike među njima u odnosu na: broj vrhova, stranica i kutova, duljine i međusobni položaj stranica (paralelnost, okomitost), vrste kutova te svojstvo osne i centralne simetričnosti.

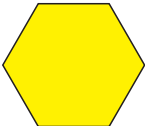
Aktivnost 1. Jednako i različito

Cilj aktivnosti jest uočiti i usmeno predstaviti osnovna matematička svojstva geometrijskih pločica. Učenici rade u peteročlanim skupinama, a svakoj od njih na raspolaganju je osnovni komplet geometrijskih pločica (slika 7). Iz njega se nasumično izdvoji jedna pločica i postavi na sredinu stola. Svaki učenik uzima jednu od preostalih pločica i opisuje ju tako da ističe što joj je jednako, a što različito u odnosu na zadanu pločicu skupine. Pri opisivanju, učenici imenuju pločice po boji. Ako je pločica na sredini stola crvena, primjeri mogućih učeničkih odgovora za zelenu, narančastu i žutu pločicu nalaze se u tablici 1.

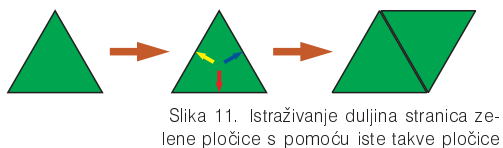
Aktivnost 2. Upoznajmo šest veličanstvenih

Cilj ove aktivnosti jest upoznati se s geometrijskim pločicama kao učilom i povezati ih s geometrijskim likovima. Aktivnost se provodi radom učenika u paru, pri čemu su potrebna dva osnovna kompleta geometrijskih pločica za svaki par učenika (po jedan komplet za svakog učenika). Svaki od učenika uzima po jednu geometrijsku pločicu – najprije pločice iste, a potom različitih boja. Prislanjanjem pločica jedne uz drugu, zajednički istražuju odnose stranica svake geometrijske pločice, kao i odnose stra-

Tablica 1. Primjeri mogućih učeničkih odgovora za neke od geometrijskih pločica ako je na sredini stola crvena pločica

Pločica na sredini stola:		
		
Zelena pločica ima tri vrha, a crvena četiri. Zelena pločica ima tri stranice, a crvena četiri. Stranice zelene pločice jednako su dugačke, a stranice crvene nisu. Zelena pločica ima šiljaste kutove, a crvena šiljaste i tupe. Zelena pločica nema paralelnih stranica, a crvena ima jedan par. Zelena pločica ima tri osi simetrije, a crvena samo jednu. Ni zelena ni crvena pločica nisu centralnosimetrične.	Narančasta i crvena pločica imaju četiri vrha. Narančasta i crvena pločica imaju četiri stranice. Stranice narančaste pločice jednako su dugačke, a stranice crvene nisu. Narančasta pločica ima prave kutove, a crvena šiljaste i tupe. Narančasta i crvena pločica imaju jednak broj dijagonala – dvije. Dijagonale narančaste pločice istih su duljina. Isto vrijedi za dijagonale crvene pločice. Narančasta pločica ima dva para paralelnih stranica, a crvena samo jedan. Narančasta pločica ima četiri osi simetrije, a crvena samo jednu. Narančasta pločica je centralnosimetrična, a crvena nije.	Žuta pločica ima šest vrhova, a crvena četiri. Žuta pločica ima šest stranica, a crvena četiri. Stranice žute pločice jednako su dugačke, a stranice crvene nisu. Žuta pločica ima tupe kutove, a crvena šiljaste i tupe. Žuta pločica ima tri para paralelnih stranica, a crvena samo jedan. Žuta pločica ima devet dijagonala, a crvena samo dvije. Dijagonale crvene pločice jednakih su duljina, a žuta pločica ima dijagonale dviju različitih duljina. Žuta pločica ima šest osi simetrije, a crvena samo jednu. Žuta pločica je centralnosimetrična, a crvena nije.

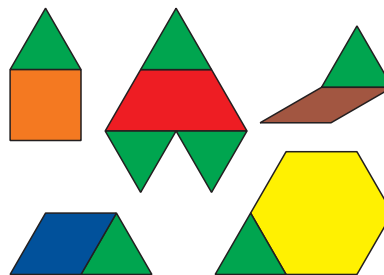
nica različitih pločica. Primjerice, učenici će otkriti da su stranice zelene pločice jednakih duljina i zaključiti da je zelena pločica oblika jednakostraničnog trokuta (slika 11).



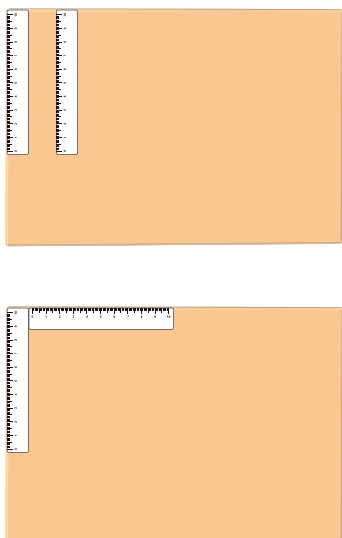
Slika 11. Istraživanje duljina stranica zelene pločice s pomoću iste takve pločice

Prislanjanjem zelene pločice uz pločice ostalih boja otkrit će da su stranice narančaste, žute, plave i smeđe pločice, kao i kraća stranica crvene pločice, istih duljina kao i stranice zelene pločice. Također, otkrit će i da je dulja stranica crvene pločice dvos-truko dulja od stranice zelene pločice (slika 12).

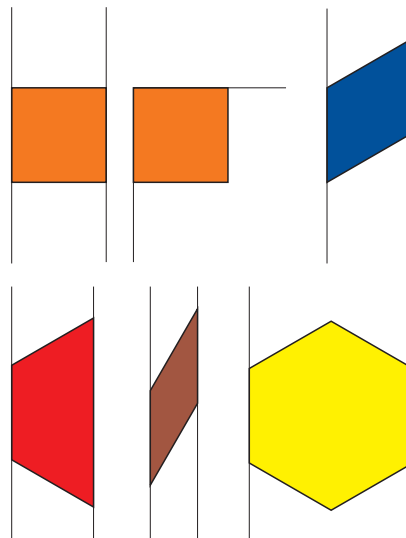
Postavljanjem dvaju ravnala uz rub klupe (ili udžbenika), kao na slici 13, učenici će dobiti model pruge i na osnovi njega istražiti međusobni položaj nasuprotnih stranica narančaste, crvene, plave i smeđe pločice. Postavljanjem ravnala uz susjedne rubove klupe istražiti će okomitost (slika 14).



Slika 12. Istraživanje duljina stranica preostalih pločica prislanjanjem jedne ili dviju zelenih pločica



Slika 13. Modeli pruge i okomitih pravaca s pomoću rubova klupe i dvaju ravnala



Slika 14. Istraživanje međusobnog položaja nasuprotnih i susjednih stranica pločica

Otkrit će da je narančasta pločica oblika kvadrata, crvena oblika trapeza, a plava i smeđa oblika romba. Uz to, otkrit će da žuta pločica ima tri para paralelnih stranica.

Aktivnost 3. *Koja je ovo pločica?*

U ovoj aktivnosti cilj je odrediti geometrijski lik predstavljen pločicom na osnovi njegovih geometrijskih svojstava. Provodi se u četveročlanim skupinama, a svakoj od njih na raspolaganju je jedan osnovni komplet geometrijskih pločica. Jedan učenik iz kompleta nasumično izvuče geometrijsku pločicu ne pokazujući je ostalim učenicima, a oni pogađaju o kojoj je pločici riječ. Prvi od preostalih učenika navodi jedno geometrijsko svojstvo, a učenik koji

ima pločicu odgovara s "Da." ili "Ne.", ovisno o tome vrijedi li za nju navedeno svojstvo ili ne vrijedi. Ako je odgovor pozitivan, sljedeće pitanje postavlja isti, a u slučaju negativnog odgovora sljedeći učenik. Učenik koji pogodi boju pločice i navede njen geometrijski naziv dobiva 1 bod (tablica 2). Igra se u četiri kruga, a u svakome pločicu izvlači drugi učenik. Pobjednik je učenik koji u igri skupi najviše bodova.

Geometrijske pločice pridonose razvoju prostornog zora, a s pomoću njih se mogu postavljati i rješavati problemski zadatci, osobito za učenike mlađeg uzrasta. To ilustriraju sljedeće dvije aktivnosti.

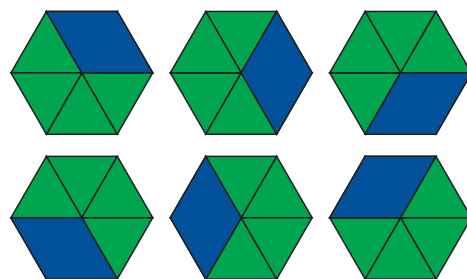
Tablica 2. Primjer pitanja i odgovora u jednom krugu igre ako je izvučena plava pločica

Učenik A izvuкао je plavu pločicu.	Pitanja učenika B, C i D redom i odgovori učenika A na njih.	
	B: Ima li pločica šest stranica? Ne.	D: Ima li pločica kut koji nema niti jedna od preostalih pločica? Ne.
	C: Ima li pločica četiri stranice? Da.	B: Je li to plava pločica? Da.
	C: Jesu li sve stranice istih duljina? Da.	B: Ta pločica ima oblik romba. Da.
	C: Jesu li svi kutovi iste vrste? Ne.	Učenik B osvaja 1 bod u ovom krugu.

Aktivnost 4. Popločimo pločice!

Cilj aktivnosti jest odrediti sva moguća popločavanja jedne geometrijske pločice preostalima i broj takvih popločavanja za pojedinu pločicu. Rad učenika odvija se u paru. Svakom učeniku potreban je komplet s najmanje šest primjeraka svake pločice i nastavni listić s tablicom (tablica 3).

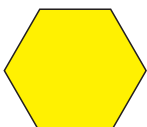
Za svaku geometrijsku pločicu svaki učenik individualno određuje različite načine na koje ju se može popločiti ostalim geometrijskim pločicama, pri čemu se popločavanja istim pločicama u različitom rasporedu smatraju jednakima, npr. ona prikazana na slici 15.



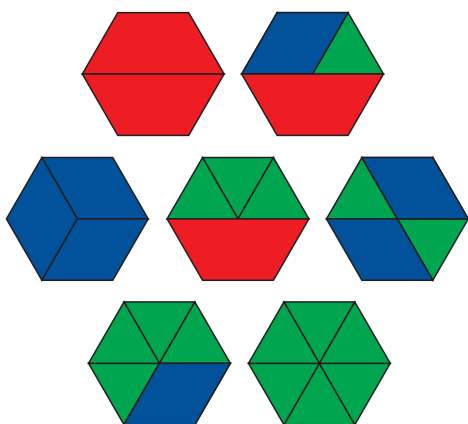
Slika 15. Popločavanja žute pločice
– isto rješenje u više položaja

Potom učenici u paru uspoređuju svoja rješenja i komentiraju sve mogućnosti koje su otkrili. Prislanjanjem i obrubljiivanjem pločica, na listić precrtaju

Tablica 3. Popločavanja geometrijskih pločica preostalim pločicama

Vrsta pločice	Skice različitih popločavanja preostalim pločicama	Broj različitih popločavanja	Najmanji i najveći broj iskorištenih pločica
			
			
			
			
			
			

svako rješenje i zapisuju broj različitih popločavanja te koliko je najmanje, a koliko najviše pločica iskorišteno za popločavanje pojedine pločice. Primjerice, popločavanje žute pločice može se napraviti na sedam različitih načina, i to s najmanje dvije, a najviše šest pločica (slika 16). Otkrit će i da se zelena, narančasta i smeđa pločica ne mogu popločiti drugim geometrijskim pločicama, plava se može popločiti na samo jedan način – dvjema zelenim pločicama, a crvena na dva načina – s tri zelene ili jednom zelenom i jednom plavom pločicom.



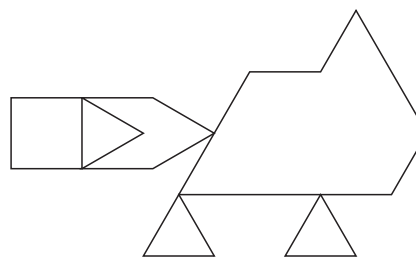
Slika 16. Sva moguća popločavanja žute pločice

Aktivnost 5. Mozaik

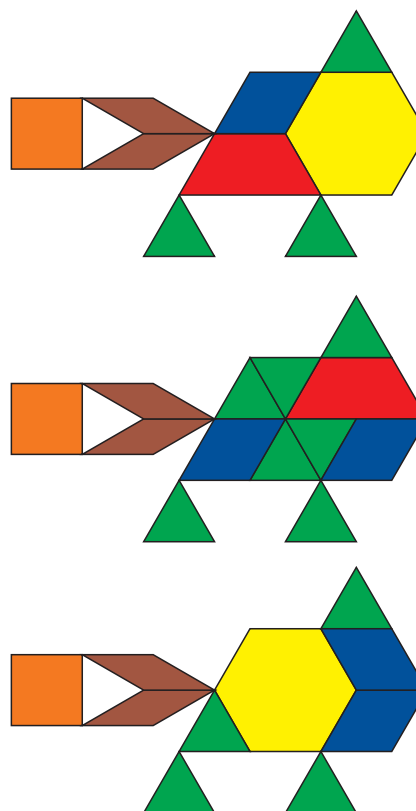
Radom u četveročlanim skupinama učenici trebaju odrediti što je moguće više različitih popločavanja zadanog mozaika. Za ovu aktivnost potreban je predložak mozaika veličine koja odgovara geometrijskim pločicama (slika 17) i komplet s deset primjeraka svake pločice za svakog učenika.

U prvoj fazi rada svaki učenik individualno pokušava popločiti mozaik danim pločicama na što je moguće više različitih načina. Svako pronađeno rješenje obrubljuju pločica precrtu u bilježnicu. U drugoj fazi učenici uspoređuju svoja rješenja koristeći pritom matematički jezik i svojstva. Također, komentiraju i broj mogućih različitih rješenja. Pobjednik je učenik koji ih je odredio najviše. Primjeri popločavanja nalaze se na slici 18.

U svim do sada opisanim aktivnostima učenici su do rješenja mogli doći manipuliranjem pločicama metodom pokušaja i promišljanja. Pomičući i ok-



Slika 17. Predložak mozaika koji treba popločiti geometrijskim pločicama



Slika 18. Primjeri popločavanja zadanog mozaika

rećući pločice te ih slažući jedne do i jedne preko drugih učenici se nisu (samo) igrali i zabavljali, već su stjecali iskustvo i sigurnost u rasuđivanju o geometrijskim oblicima te matematičkim svojstvima i odnosima. Budući da je uloga pločica pružiti podršku u razvoju apstraktnog matematičkog mišljenja, u provođenju svake od aktivnosti učenike je potrebno navoditi na uočavanje strukture i pravilnosti u dobivenim slikama te na mate-

matičko objašnjavanje i argumentiranje provedenih postupaka i dobivenih zaključaka. Pločice postupno trebaju zamijeniti njihovi crteži i skice, a potom i matematička apstrakcija.

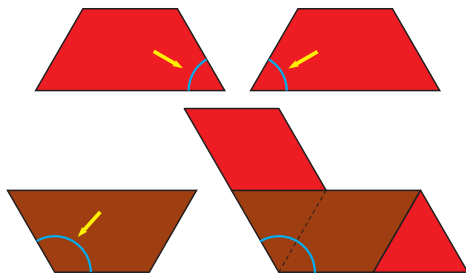
Članak završavamo prikazom nekoliko aktivnosti s pločicama u kontekstu istraživanja kutova.

5. Geometrijske pločice i kutovi

Istraživanju veličina kutova geometrijskih pločica prethode aktivnosti istraživanja međusobnih odnosa i veza unutarnjih kutova pojedine i međusobno različitih pločica na kvalitativnoj razini.

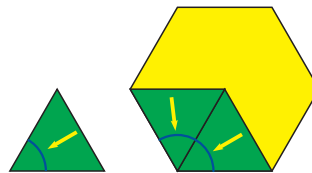
Aktivnost 6. Šest veličanstvenih i njihovi kutovi

Cilj aktivnosti jest odrediti vrste i međusobne odnose unutarnjih kutova geometrijskih pločica. Planirana je za suradnički rad učenika u paru, a svakom od njih potreban je komplet s najmanje pet primjeraka svake od šest geometrijskih pločica. Veze među kutovima pločica iste vrste, kao i pločica različitih vrsta, učenici određuju postavljanjem pločica jedne preko druge i jedne do druge. Primjerice, uočiti će da su šiljasti kutovi crvene pločice međusobno sukladni, kao i tupi kutovi, te da je tupi kut dvostruko veći od šiljastog (slika 19).



Slika 19. Istraživanje kutova crvene pločice – jednakokračnog trapeza

Slaganjem dviju žutih pločica jedne na drugu te dviju zelenih na žutu pločicu (slika 20) također će uočiti i da su kutovi žute pločice međusobno sukladni te da je kut žute pločice dvostruko veći od kuta zelene pločice. Analogno se uspoređuju i kutovi drugih geometrijskih pločica.

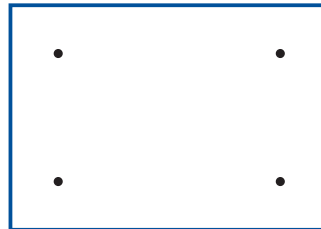


Slika 20. Veza kutova žute i zelene pločice – jednakokraničnog trokuta i pravilnog šesterokuta

Zaključci dobiveni u ovoj aktivnosti mogu se primijeniti u sljedećoj problemskoj situaciji.

Aktivnost 7. Mozaik oko točke

Cilj ove aktivnosti jest izgraditi što je moguće više različitih mozaika od geometrijskih pločica oko zadane točke, koristeći pritom svojstva unutarnjih kutova geometrijskih pločica. Provođi se radom u četveročlanim skupinama, pri čemu je za svaku skupinu potrebno pripremiti komplet geometrijskih pločica s barem sedam primjeraka svake pločice, papir formata A3 s istaknute četiri točke (slika 21) i zajedničku tablicu (tablica 4).



Slika 21. Papir formata A3 s istaknutim točkama

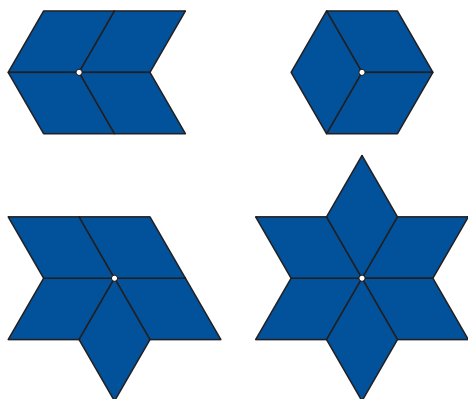
Tablica 4. Zajednička tablica za četveročlanu skupinu učenika u aktivnosti Mozaik oko točke

Korištene pločice (po bojama)	Broj korištenih geometrijskih pločica
sve zelene	2, 3, 4, 5, 6, 7
sve narančaste	2, 3, 4, 5, 6, 7
sve crvene	4, 5, 6
sve plave	4, 5, 6, 7
sve smeđe	2, 3, 4
sve žute	2, 3, 4
dvije boje	3, 4, 5, 7, 9, 12
tri boje	3, 4, 5
četiri boje	3, 4, 5, 6, 7, 8
pet boja	2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
šest boja	2, 3, 4, 5, 6

Svaki učenik u skupini na A3 papiru slaže geometrijske pločice oko jedne točke na sljedeći način:

- istaknuta točka je zajednički vrh svih korištenih pločica
- pločice se nadovezuju jedna do druge tako da između nema praznina niti se preklapaju
- sve pločice zajedno određuju puni kut (s vrhom u istaknutoj točki).

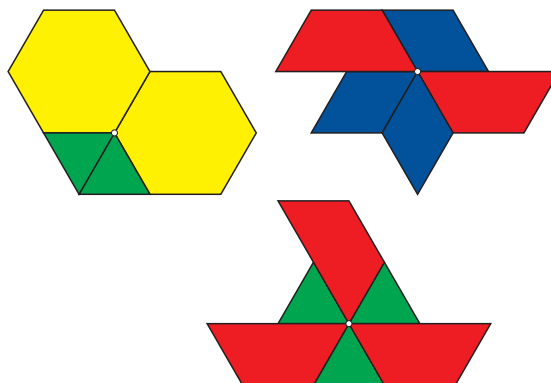
Nakon svakog mozaika sastavljenog prema ovim uvjetima potrebno je u zajedničkoj tablici 4 u odgovarajućem retku zaokružiti broj pločica korištenih za njegovo sastavljanje. Ako taj broj nije isписан na listi, potrebno ga je dopisati. Nakon što su svi učenici upisali svoja rješenja, u skupini zajednički komentiraju njihov broj i u tablici precrtaju broj pločica koje je nemoguće iskoristiti za rješenje zadatka. Na slici 22 nalaze se svi mozaici koje je oko točke moguće sastaviti koristeći samo plave pločice. Dakle, u četvrtom retku tablice 4 potrebno je zaokružiti brojeve 4, 5, 6, dopisati broj 3 i precrtati broj 7.



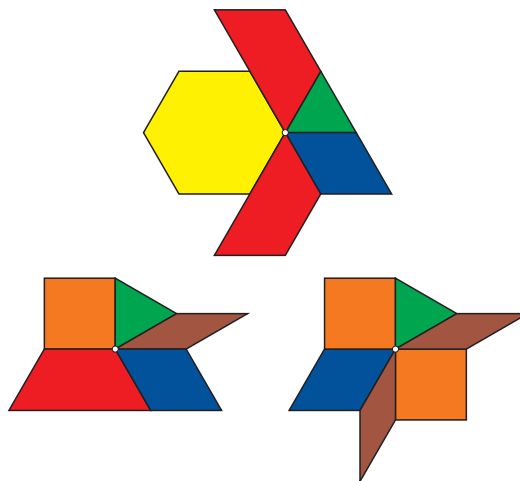
Slika 22. Mozaici oko točke sastavljeni od plavih pločica

Primjeri nekih rješenja s pločicama dviju različitih boja nalaze se na slici 23, dok je na slici 24 dano nekoliko primjera rješenja s četiri i pet različitih pločica, odnosno boja.

Nakon rada učenika u skupinama, slijedi razredna diskusija u kojoj se mogu komentirati neka rješenja. Primjeri pitanja koja nastavnik pritom može postaviti su: *U kojim slučajevima korištenih pločica postoji samo jedno rješenje i zašto? Koje se boje pločica mogu u potpunosti zamijeniti jedne drugima i zašto?*



Slika 23. Primjeri dvobojnih mozaika oko točke



Slika 24. Primjeri mozaika oko točke sastavljenih od četiri ili pet različitih geometrijskih pločica

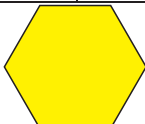
Koja kombinacija boja pločica u mozaiku nije moguća i zašto? U svojoj argumentaciji učenici bi se trebali služiti svojstvima unutarnjih kutova geometrijskih pločica iz aktivnosti 6.

Izlaganje završavamo aktivnostima u kojima učenici određuju veličine unutarnjih i vanjskih kutova geometrijskih pločica i primjenjuju ih u složenijoj situaciji.

Aktivnost 8. Koliko su veliki naši kutovi?

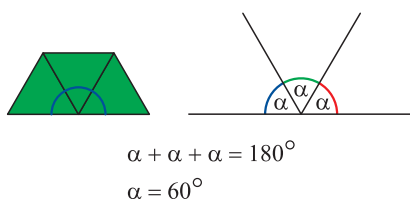
Cilj aktivnosti jest bez korištenja kutomjera odrediti stupanjske mjere unutarnjih i vanjskih kutova svih geometrijskih pločica. Učenici su organizirani u četveročlane skupine, a za svaku od njih treba pri-

Tablica 5. Unutarnji i vanjski kutovi geometrijskih pločica

Veličine unutarnjih i vanjskih kutova geometrijskih pločica					
					
unutarnji	vanjski	unutarnji	vanjski	unutarnji	vanjski
					
unutarnji	vanjski	unutarnji	vanjski	unutarnji	vanjski

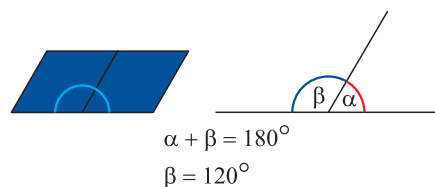
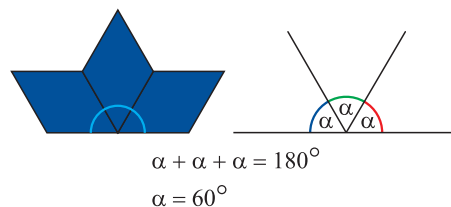
premiti komplet geometrijskih pločica s barem šest primjeraka svake pločice te četiri primjerka tablice 5 (po jednu za svakog učenika).

Za svaku geometrijsku pločicu učenici, surađujući u skupini, određuju veličine unutarnjih i vanjskih kutova koristeći pritom poznate činjenice o veličini punog (360°) i ispruženog kuta (180°) te odnose i veze unutarnjih kutova iste i različitih geometrijskih pločica, otkrivene u aktivnosti 6. Postupak zapisuju u bilježnicu (pločice precrtaju obrublivanjem) i popunjavaju tablicu. U razrednoj diskusiji komentiraju se različite mogućnosti mjerenja kutova. Jedan od mogućih postupaka određivanja veličina unutarnjih kutova zelene pločice, tj. jednakostraničnog trokuta, prikazan je na slici 25.

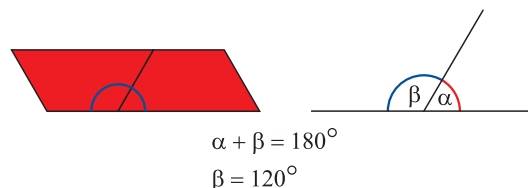
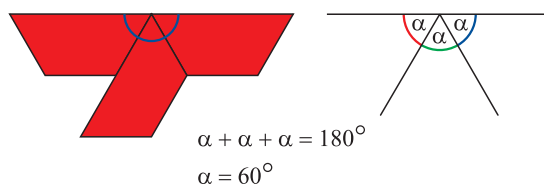


Slika 25. Unutarnji kutovi zelene pločice – jednakostraničnog trokuta

Slika 26 prikazuje postupak određivanja unutarnjih i vanjskih kutova plave pločice, tj. "širokog" romba. Postupak određivanja unutarnjih kutova crvene pločice, tj. jednakokračnog trapeza prikazan je na slici 27.

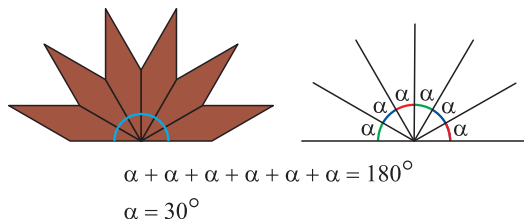


Slika 26. Unutarnji i vanjski kutovi plave pločice – "širokog" romba



Slika 27. Unutarnji kutovi crvene pločice – jednakokračnog trapeza

Na sličan način određuju se i šiljasti unutarnji kutovi smeđe pločice – “uskog” romba (slika 28).



Slika 28. Šiljasti unutarnji kutovi smeđe pločice – “uskog” romba

Vanjski kut zelene pločice može se odrediti kako je prikazano na slici 29. Vanjski kut zelene pločice ima istu veličinu kao tupi kut plave pločice, $\alpha' = 120^\circ$.



Slika 29. Vanjski kut zelene pločice – jednakostraničnog trokuta

Postupci za ostale pločice analogni su prikazanim.

Stечena znanja mogu se primijeniti i u složenijoj situaciji, kao u sljedećoj aktivnosti.

Aktivnost 9. Unutarnji kutovi složenog lika

Cilj aktivnosti jest odrediti veličine unutarnjih kutova složenog lika sastavljenog od različitih geometrijskih pločica. Učenici rade suradnički u četveročlanim skupinama, a svakoj od njih potreban je komplet geometrijskih pločica s barem dvanaest primjeraka svake od pločica te zajednički nastavni listić za sastavljanje, crtanje i analizu složenog lika (tablica 6).

Svaka skupina po volji sastavlja jedan lik u kojem je korištena barem jedna geometrijska pločica svake boje. Složeni lik obrubljivanjem pločica precrtaju na

Tablica 6. Nastavni listić za sastavljanje lika, crtež i analizu u aktivnosti Unutarnji kutovi složenog lika

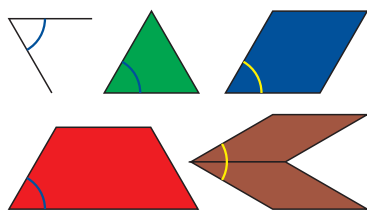
Prostor za sastavljanje lika od pločica	Crtež lika
Broj unutarnjih kutova pojedine vrste	

Tablica 7. Primjer popunjenog nastavnog listića u aktivnosti Unutarnji kutovi složenog lika

Prostor za sastavljanje lika od pločica	Crtež lika
Broj unutarnjih kutova pojedine vrste	

listić, potom označe njegove unutarnje kutove, zapisuju njihov broj i vrste te s pomoću geometrijskih pločica određuju njihove veličine. Svaki učenik treba s ostalim članovima svoje skupine komentirati i raspraviti način na koji je odredio veličinu pojedinog kuta. Svaka skupina treba odrediti što je moguće više različitih kombinacija pločica za mjerenje istaknutih kutova. Primjer jednog složenog lika i analize njegovih unutarnjih kutova dan je u tablici 7.

Uočimo da su na crtežu lika u tablici 7 kutovi iste vrste označeni lukovima iste boje (šiljasti zelenom, pravi narančastom, tupi crvenom, a izbočeni plavom) iako nisu nužno istih veličina. Primjerice, veličinu većeg šiljastog kuta (s lukom tamnije zelene boje) možemo izmjeriti s pomoću jedne zelene, jedne plave, jedne crvene pločice ili dviju smeđih pločica, kako je prikazano na slici 30. Slično, manji



Slika 30. Mjerenje većeg šiljastog kuta

šiljasti kut (s lukom svjetlije zelene boje) odgovara šiljastom kutu smeđe pločice (30°), dok je veličina većeg izbočenog kuta (s lukom svjetlije plave boje) npr. zbroj veličina pravog kuta narančaste pločice (90°), tupog kuta plave pločice (120°) i tupog kuta crvene pločice (120°) te iznosi 330° .

Nastavnička je uloga provoditi učenike kroz proces izgradnje matematičke kompetencije, poticati svakog učenika na eksperimentiranje, istraživanje i stvaranje vlastitih ideja. Pritom je različite ideje te njihovu valjanost i učinkovitost važno u razrednoj diskusiji predstaviti i raspraviti sa svim učenicima. Pozornost treba dati i rješenjima do kojih su učenici, čije je matematičko mišljenje već na apstraktnoj razini, došli bez pomoći geometrijskih pločica, kao i pružiti podršku učenicima kojima prelazak iz enaktivne u ikoničku fazu izgradnje matematičkog koncepta predstavlja poteškoću. Pri radu s geometrijskim pločicama učenike treba sustavno poticati na komunikaciju matematičkim jezikom.

Ovaj rad samo je uvertira u nebrojene mogućnosti rada s geometrijskim pločicama u nastavi. U njegovom nastavku i dalje ćemo se baviti geometrijom, s fokusom na primjeni pločica u kontekstu preslikavanja ravnine te sukladnosti i sličnosti.

LITERATURA

- 1/ D. L. Ball (1992.): *Magical Hopes: Manipulatives and the Reform of Math Education*, *Elementary School Journal*, 90, 449–466.
- 2/ D. Belenky i L. Schalk (2014.): *The Effects of Idealized and Grounded Materials on Learning, Transfer, and Interest: An Organizing Framework for Categorizing External Knowledge Representations*, *Educational Psychology Review*, 26, 27–50.
- 3/ J. S. Bruner (1960.): *The Process of Education*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- 4/ J. S. Bruner (1986.): *Actual Minds, Possible Worlds*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
- 5/ Z. P. Dienes (1969.): *Building Up Mathematics*, London, UK: Hutchison Education.
- 6/ European Commission (2019.): *Key competences for lifelong learning*, Luxembourg: Publications Office of the European Union.
- 7/ H. Freudenthal (1973.): *Mathematics as an Educational Task*, Riedel Publishing Company.
- 8/ H. Freudenthal (1991.): *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*, Dordrecht, Nizozemska: Kluwer Academic Publishers.
- 9/ E. R. Fyfe, N. M. McNeil, J. Y. Son i R. L. Goldstone (2014.): *Concreteness Fading in Mathematics and Science Instruction: a Systematic Review*, *Educational Psychology Review*, 26(1) Special Issue: *Theoretical Perspectives and Empirical Relevant to Classroom Instruction with Manipulatives*, 9–25.
- 10/ J. M. Furner i N. L. Worrell (2017.): *The Importance of Using Manipulatives in Teaching Math Today*, *Transformations*, 3(1), Article 2. Dostupno na: <https://nsuworks.nova.edu/transformations/vol3/iss1/2>
- 11/ K. Gravemeijer (2002.): *Preamble: from Models to Modeling*, u K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. Oers i L. Verschaffel (ur.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education*, 7–22, Dordrecht, Nizozemska: Kluwer.
- 12/ N. Golafshani (2013.): *Teachers' Beliefs and Teaching Mathematics with Manipulatives*, *Canadian Journal of Education / Revue canadienne de l'éducation*, 36(3), 137–159.

- 13/ R. L. Goldstone i Y. Sakamoto (2003.): The Transfer of Abstract Principles Governing Complex Adaptive Systems, *Cognitive Psychology*, 46, 414–466.
- 14/ R. Lesh (1979.): *Mathematical Learning Disabilities: Considerations for Identification, Diagnosis, Remediation*, u R. Lesh, D. Mierkiewicz, i M. G. Kantowski (ur.), *Applied mathematical problem solving*, 111–180, Columbus, OH: ERIC.
- 15/ R. A. Lesh, T. R. Post i M. J. Behr (1987.): *Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving*, u C. Janvier (ur.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, 33–40. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- 16/ P. S. Moyer (2001.): Are We Having Fun Yet? How Teachers Use Manipulatives to Teach Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 175–197.
- 17/ P. S. Moyer i M. G. Jones (2004.): Controlling Choice: Teachers, Students, and Manipulatives in Mathematics Classrooms, *School Science and Mathematics*, 104, 16–31.
- 18/ National Research Council (2001.): *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*, Washington, DC: The National Academies Press.
- 19/ Z. A. Ndlovu i L. Chiromo (2019.): Pre-service mathematics teachers' development process in using manipulatives in number operations, *South African Journal of Childhood Education*, 9(1), a698. Dostupno na: <http://www.sajce.co.za>
- 20/ J. Piaget (1952.): *The Child's Conception of Number*, New York, NY: Humanities Press.
- 21/ J. Piaget (1970.): *Science of Education and the Psychology of the Child*, New York, NY: Orion.
- 22/ H. Piccioto (1999.): *Geometry Labs. Activities for Grades 8–11*. Dostupno na: <https://www.mathed.page/>
- 23/ R. R. Skemp (1987.): *The Psychology of Learning Mathematics*, Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- 24/ R. R. Skemp (2006.): Relational Understanding and Instrumental Understanding, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(2), 88–95, (revidirano izdanje članka: R. R. Skemp (1976.): Relational Understanding and Instrumental Understanding, *Mathematics Teaching*, 77, 20–26, reizdanog 1978. godine i u časopisu *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9–15).
- 25/ E. J. Sowell (1989.): Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), 498–505.
- 26/ P. W. Thompson i D. Lambdin (1994.): Concrete Materials and Teaching for Mathematical Understanding, *The Arithmetic Teacher*, 41(9), 556–558.
- 27/ D. H. Uttal, K. V. Scudder i J. S. DeLoache (1997.): Manipulatives as Symbols: A New Perspective on the Use of Concrete Objects to Teach Mathematics, *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18, 37–54.
- 28/ J. A. Van de Walle, K. S. Karp i J. M. Bay-Williams (2010.): *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (7th ed.), Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Večer matematike 2021.

Deveta **Večer matematike** u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva održat će se u **četvrtak, 2. prosinca 2021. godine**. I ove će godine svaki sudionik odlučiti na koji će način i u koje vrijeme provesti Večer matematike u svojoj instituciji te odabrati koje od ponuđenih materijala želi koristiti.

Najveći dio novih materijala bit će prilagođen tako da se Večer matematike može jednostavno provesti i u virtualnom okruženju. Stoga smo uz razne društvene igre i aktivnosti pripremili mnoštvo interaktivnih *escape roomova*, *online* slikovnica, digitalnih adventskih kalendara i kvizova, a organizirat ćemo i predavanja kojima će se moći pristupiti *online*.

Novosti o Večeri matematike moći ćete pratiti na mrežnim stranicama HMD-a, <http://www.matematika.hr/vecermatematike> i na Facebook stranici <https://www.facebook.com/vecermatematike/?fref=ts>.

Veselim se ponovnoj suradnji!

Tanja Soucie, prof. i Ivana Katalenac, prof.
voditeljice projekta Večer matematike

