

Tko je prvi... uveo negativne brojeve?

Franka Miriam Brueckler,
Zagreb



Iako će i danas mnogi nematematičar reći da negativni brojevi nemaju smisla ili da to nisu brojevi, ipak se danas radi o toliko standardnoj temi da se svatko s njome susreće u dobi od oko 10 godina. Čak i ako im ne vidi svrhu, nauči "snaći se" s njima. Budući da je većina osnovnoškolske, a i srednjoškolske matematike uglavnom vrlo starog podrijetla, za očekivati je da se i kod negativnih brojeva radi o nečemu odavno otkrivenom/uvedenom (točno) i prihvaćenom (netočno). Kao što ćemo vidjeti, iako su negativni brojevi u ljudskom rodu prisutni otprilike 1500 – 2000 godina, čak i u 19. st. i čak i među znamenitim matematičarima, nalazili su se "negativnoskeptici". Najpoznatiji među njima bio je znameniti logičar Augustus De Morgan, koji je 1843. napisao:

Nije nam namjera pratiti ranije algebričare u njihovim različitim upotrebama negativnih brojeva. Ti proizvodi algebre su sačuvali svoje postojanje usprkos očitoj nedostatku racionalnog objašnjenja koji je karakterističan za svaki pokušaj njihove teorije.

Vjerujem da je svaki, čak i površni čitatelj naše serije članaka *Tko je prvi...* uočio da je za mnoge matematičke pojmove i činjenice odgovor na pitanje iz naslova prilično kompliciran i prije svega nije jednoznačan. Tako je i s negativnim brojevima. Jedino što je vezano za njihovu prvu pojavu jednostavno reći jest da su stigli s Dalekog istoka, odnosno da se (prema svim trenutačno poznatim izvorima) prvi puta pojavljuju u staroj Kini. Konkretno, radi se o razdoblju dinastije Han (202. g. pr. n. e. – 220. g. n. e.). U to doba kao pomagalo u računanju koristili su se štapići koji su se počeli izrađivati u dvije boje (crvena za "imanje" i "prihode", a crna za "dugove" i "rashode") te su se tako negativni brojevi pojavili kao dugovi u kontekstu trgovačkih i poreznih računa. Slične ideje pojavile su se i u astronomskim proračunima, u kojima se aproksimacija neke vrijednosti postizala postupnim približavanjem "odozgo" (po većim brojevima) ili pak "odozdo" (po manjim brojevima). U svakom slučaju, negativni brojevi pojavljuju se u najpoznatijem

tijem starokineskom matematičkom tekstu, "Devet poglavlja matematičkog umijeća", napisanom najvjerojatnije u razdoblju dinastije Han, a koji je kroz kasnija stoljeća doradivan i komentiran. Posebno su poznati komentari matematičara **Liu Huija** (3. st.). Negativni brojevi pojavljuju se u osmom od "Devet poglavlja", koje se bavi rješavanjem sustava linearnih jednadžbi, a svi sustavi dani su u kontekstu, primjerice:

Prodaš li 2 krave i 5 ovaca da kupiš 13 svinja, preostat će ti 1000 novčića. Prodaš li 3 krave i 3 svinje da kupiš 9 ovaca, imat ćeš taman dovoljno novaca. Prodaš li 6 ovaca i 8 svinja da kupiš 5 krava, nedostajat će ti 600 novčića. Kolike su cijene po jedne krave, ovce i svinje?

Metodu koja se koristi u "Devet poglavlja" za rješavanje sustava linearnih jednadžbi danas bismo zvali Gaušovom metodom eliminacije. Pri primjeni te metode prirodno i nužno se pojavljuju i negativni brojevi. Liu Hui u svom komentaru eksplicitno kaže da se crveni i crni štapići pri tim računima međusobno poništavaju te detaljno objašnjava kako se crveni i crni štapići (pozitivni i negativni brojevi) ponašaju pri zbrajanju i oduzimanju. Štoviše, Liu Hui kaže da se za svaku jednadžbu mogu izmijeniti boje štapića (što iz naše perspektive odgovara množenju jednadžbe s minus 1).

Indijski matematičar **Brahmagupta** (7. st.) prvi je, koristeći se konceptima "imanja" i "duga", jasno opisao pravila za računanje s negativnim brojevima (i nulom, vidi članak u broju 107):

Dug minus nula je dug. Imanje minus nula je imanje. Dug oduzet od nule je dug. Imanje oduzeto od nule je dug. Umnožak nule s imanjem ili dugom je nula. Umnožak ili količnik dvaju imanja je imanje. Umnožak ili količnik dvaju dugova je imanje. Umnožak ili količnik imanja i duga je dug. Umnožak ili količnik duga i imanja je dug.

Brahmagupta je također imao i zaseban simbol za oznaku negativnih brojeva. Opis negativnih brojeva i računa s njima nalazi se i u znamenitom staroindij-

skom rukopisu Bakhshali, čije datiranje je izuzetno nesigurno (varira od 2. st. pr. n. e. do 12. st. n. e.).

S druge strane, antički grčki matematičari kao brojeve su prihvaćali isključivo prirodne brojeve,¹ a njihovi geometrijski i aritmetički rezultati danas se mogu interpretirati u kontekstu pozitivnih realnih brojeva, no negativni brojevi u njih se ne pojavljuju ni eksplicitno ni implicitno. Izuzetak je posljednji veliki matematičar antike, **Diofant Aleksandrijski** (vjerojatno 3. st. n. e.), koji se u svojoj "Aritmetici" kao jedini starogrčki matematičar bavi jednadžbama, čak i koristi vlastitu algebarsku simboliku: nepoznanica je ς , jednakost je ι^σ , nulta potencija nepoznanice je $\overset{\circ}{M}$, a za brojeve koristi standardnu starogrčku alfabetsku notaciju. Jedna od njegovih jednadžbi bila je

$$\overline{\delta} \overset{\circ}{M} \iota^\sigma \overline{\delta} \varsigma \overline{\kappa} \overset{\circ}{M},$$

tj. $4 = 4x + 20$, za koju kaže da bi imala negativno, dakle "apsurdno" rješenje.

Iako se arapska matematika razvila na temeljima indijske (i grčke), rijetki tekstovi iz "zlatnog doba" arapske matematike spominju negativne brojeve. Najpoznatiji (i čini se najstariji) primjer je **Abu'l Vafa Al-Buzdžani** (10. st.). On u svom djelu o aritmetici potrebnoj pisarima i trgovcima daje primjer kojim ilustrira jedno algebarsko pravilo (iskazano riječima). U tom primjeru kad od "imanja" 3 oduzmemo 5, dobijemo "dug" 2; zatim taj dug množi s 10 čime dobiva dug 20, što kad se pribroji umnošku razlika od 10 do 3 i 5 daje točno umnožak od 3 i 5, tj. daje račun

$$10 \cdot (3 - 5) + (10 - 3) \cdot (10 - 5) = 3 \cdot 5 = 15.$$

Al-Samaval u 12. stoljeću je pak pokazao dublje razumijevanje osnovnih algebarskih svojstava negativnih brojeva:

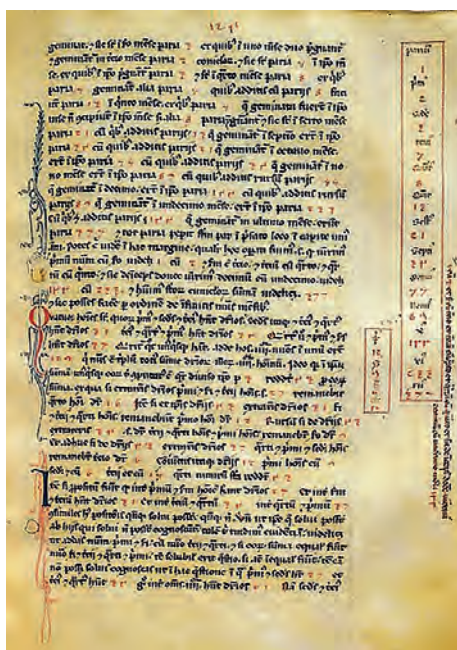
Ako oduzmemo pozitivan broj od 'prazne potencije', ostaje isti negativni broj ... ako oduzmemo negativni broj od 'prazne potencije', ostaje isti pozitivan broj – moderno zapisano, uočio je da za $a > 0$ vrijedi $0 - a = -a$, $0 - (-a) = a$. Istakao je

¹ Izuzev jedinice, *monos*, koja je bila počelo, izvor svih ostalih brojeva.

i da množenje negativnog broja s pozitivnim daje negativan, a negativnog s negativnim pozitivan umnožak.

U srednjem vijeku arapski tekstovi postupno su prevedeni na latinski te su se zapadnoeuropski znanstvenici postupno počeli upoznavati s arapskim rezultatima. Posebno veliko znanje o arapskoj matematici imao je najveći europski srednjovjekovni matematičar **Leonardo iz Pise**, poznatiji kao Fibonacci (12./13. st.). U svom glavnom djelu *Liber Abaci* (slika 1), među mnogim sličnim zadacima daje i sljedeći:

Četiri čovjeka našla su novčanik. Ako ga uzme prvi, imat će dvostruko novaca koliko drugi i treći skupa. Ako ga uzme drugi, imat će triput toliko novaca koliko treći i četvrti skupa. Ako ga uzme treći, imat će četiri puta toliko novaca koliko prvi i četvrti skupa. Ako ga uzme četvrti, imat će pet puta toliko novaca koliko prvi i drugi skupa.



Slika 1. Stranica iz *Liber Abaci*, "Knjige o računanju". Preuzeto s Wikipedije (public domain).

Leonardo zatim kaže da taj zadatak nema rješenje osim ako se prihvati da je prvi čovjek u dugu, a zatim daje (i objašnjava, uključujući demonstracije

kako se dug ponaša u računima) rješenje: Najmanje brojeve vrijednosti rješenja glase: drugi ima 4, treći ima 1, četvrti ima 4, novčanik 11, a prvi ima dug 1. Uz to, negativni brojevi se kod Leonarda pojavljuju i pri rješavanju drugih sličnih zadataka, u koracima njegove metode, slično kao što su se pojavljivali i u "Devet poglavlja".

Ipak, još mnoga stoljeća kasnije, čak i matematičari koji su prihvaćali negativne brojeve kao opise dugova i korake u računima, nisu ih prihvaćali kao "stvarna" rješenja jednadžbi niti kao "prave" brojeve. Svijest o negativnim brojevima kao samostalnim objektima i brojevima "ravnopravnim" ostalima postupno se razvijala sve do 19. stoljeća. Tada su konačno korektno definirani realni brojevi. Naravno, postojale su i iznimke. Primjerice, **fra Luca Pacioli** (15./16. st., slika 2) u jednoj svojoj bilješci daje zadatak u kojem traži dva broja (dakle, ne dva novčana iznosa) s određenim svojstvima i navodi kako je rješenje da je jedan od njih 15, a drugi –5. Prema mojim saznanjima, čini se da je to prva pojava negativnog broja prihvaćenog kao rješenje jednadžbe, bez ikakve dodatne interpretacije u kontekstu "duga", no trebat će još nekoliko stoljeća da takav pristup bude šire prihvaćen.



Slika 2. Portret fra Luce Pacioliya iz 15. st. Preuzeto s Wikipedije (public domain).

Neki matematičari, primjerice Michael Stifel (15./16. st.) pokušali su negativnim brojevima pristupiti teorijski, no bez većeg uspjeha (Stifel ih tako smatra

apsurdnim, besmislenim, ali ih istovremeno proglašava manjima od nule). Čak i veliki René Descartes (17. st.), koji je utemeljio moderni pristup jednačbama, smatrao je negativna rješenja jednačbi “krivim”, a u svom je koordinatnom sustavu koristio samo prvi kvadrant. Jean d’Alembert u 18. st. pak u sklopu svog opisa pod “Negativno” u Diderotovoj “Enciklopediji” navodi da zadatak s negativnim rješenjem znači da je “dio hipoteze lažan, ali se smatra istinitim”.

Bitna iznimka u tom općem trendu bio je engleski matematičar **John Wallis** (17. st., slika 3). Ne samo da je on u svojoj *Treatise on Algebra* (1685.) prvi došao na ideju brojevnog pravca na kojem se negativni brojevi nanose lijevo, a pozitivni desno od nule,² već je dao definiciju i interpretaciju negativnih brojeva uključivo navođenja i objašnjenja pravila računa s njima. Za više detalja o tom njegovom doprinosu, temeljem kojeg bi se – ako bi se uopće mogao istaknuti jedan matematičar za odgovor na pitanje iz naslova – moglo reći da je Wallis prvi koji je “pošteno” uveo negativne brojeve, upućujemo na izvor pod rednim brojem 4.



Slika 3. John Wallis.
Preuzeto s Wikipedije (public domain).

Ipak, još dugo su drugi matematičari, primjerice Francuz Lazare Carnot (18./19. st.) te Englezi William Frend (18./19. st.) i Francis Maseres (18./19. st.) smatrali ideju negativnih brojeva apsurdnom, smiješnom, odnosno da “zamračuju stvari koje su po svojoj prirodi sasvim očite i jednostavne” pa su stoga besmisleni. Naposljetku, posljednji skeptici za negativne brojeve među matematičarima nestali su nakon što su u drugoj polovici 19. stoljeća s jedne strane Richard Dedekind i Georg Cantor do kraja precizno definirali realne brojeve, a druge strane Giuseppe Peano i Hermann Grassmann utemeljili aksiomatski pristup algebri racionalnih brojeva.

LITERATURA

- 1/ R. P. Agarwal, H. Agarwal (2021.): Origin of Irrational Numbers and Their Approximations, *Computation*, 9, 29, <https://doi.org/10.3390/computation9030029>
- 2/ MacTutor History of Mathematics Archives, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>, pristupljeno 4. 9. 2021.
- 3/ R. Mattessich (1998.): From Accounting to Negative Numbers: A Signal Contribution of Medieval India to Mathematics, *Accounting Historians Journal* 25, str. 129–145.
- 4/ D. Mumford (2010.): What's so Baffling About Negative Numbers? – a CrossCultural Comparison, *Studies in the History of Indian Mathematics*, str. 113–143.
- 5/ L. Rogers: *The History of Negative Numbers*, <https://nrch.maths.org/5961>, pristupljeno 4. 9. 2021.

² Tu ideju imao je već indijski matematičar Bhaskara II u 12. st., poznat po detaljnom opisu pravila računanja s pozitivnim, negativnim brojevima i nulom. Naime, pozitivne i negativne brojeve u svojim je geometrijskim konstrukcijama nanosio u suprotnim smjerovima od početne točke.