

Problemi raspodjele kokosa, datulja, jabuka, novčića i manga – razne formulacije i opće rješenje

Josip Sliško, Puebla, Meksiko



U 13. poglavlju dugo čekane i tek nedavno objavljene knjige *Avanture u rekreativnoj matematici*, David Singmaster donosi fascinantnu povijest problema višestrukih promjena (Singmaster, 2021.). Premda je prve probleme takvog tipa formulirao indijski matematičar Mahavira u IX. stoljeću, a u europsku matematiku uveo Fibonacci 1202. godine, poglavljje je naslovljeno *Majmun i kokosovi orasi*. Tome je “kumovala” inačica problema *Coconuts* koju je objavio Ben Ames Williams 9. listopada 1926. godine u američkom časopisu *Saturday Evening Post*:

“Pet ljudi i majmun doživjeli su brodolom i našli su se na pustom otoku. Prvi dan proveli su skupljajući kokosove orahe za hranu. Krajem dana sve su orahe skupili na jednu hrpu i otišli na spavanje. Ali, kad su svi zaspali, probudio se jedan čovjek i pomislio je da bi ujutro moglo doći do svađe oko podjele kokosa, pa je odlučio odmah uzeti svoj dio. Podijelio je sve kokose na pet jed-

nahih hrpa. Preostao mu je jedan kokos koji je dao majmunu, svoju je hrpu kokosovih oraha sakrio, a ostatak oraha ponovno je stavio na jednu hrpu.

Malo nakon toga probudio se drugi čovjek i učinio istu stvar. I njemu je ostao jedan kokos pa ga je dao majmunu. Tako je svih pet ljudi jedan za drugim učinilo isto. Svatko je, kad se probudio, uzeo petinu kokosa iz hrpe i ostavio po jedan kokos za majmunu. Ujutro su podijelili preostale kokose na pet jednakih dijelova. Naravno, svatko od njih morao je znati da određena količina kokosovih oraha nedostaje, no kako je svatko od njih bio kriv, nitko ništa nije rekao. Koliko je kokosovih oraha bilo na početku?”

Budući da Williams nije objavio rješenje, on i redakcija dobili su brojna pisma, brzojave i telefonske pozive u kojima je traženo da se objavi koliki je bio početni broj kokosa. Jedna članica redakcije rekla je da su došli u stanje u kojem ih je samo spominjanje riječi “kokos” dovodilo do živčanog sloma.

Josip Sliško, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, josipslisko47@gmail.com

Williams je kasnije skromno primijetio: "Rijeka pisma ne dokazuje da je priča bila posebno dobra, ona samo sugerira da matematičke zagonetke zanimaju puno ljudi."

Dodatni impuls popularnosti ovog zagonetnog problema dao je Martin Gardner 1958. godine, posvećujući mu svoju kultnu kolumnu "*Matematičke igre*" u časopisu *Scientific American* (Gardner, 1958.). Gardner je izložio standardni algebarski postupak za dobivanje diofantske jednadžbe koja odgovara problemu u kojem majmun, za razliku od Williamsove formulacije, i u šestom dijeljenju dobiva jedan kokos:

$$1024N = 15\,625F + 11\,529,$$

gdje je N početni broj kokosa, a F broj kokosa koji svatko dobiva u zadnjoj (jutarnjoj) podjeli.

Gardner ne navodeći detalje određuje, da je najmanji početni broj kokosa 15 621.

Spomenut je i "otkačeni" postupak rješavanja s "negativnim kokosima", no njega nećemo razmatrati u ovom članku. Gardner je u kolumni dao i donekle skeptičnu ocjenu statusa problema:

"Danas je problem broja kokosovih oraha vjerojatno najviše obrađen i najmanje riješen od svih diofantskih mozgalica."

U ovom se članku detaljno i kronološki u četiri epizode opisuje povijest formulacija i načina rješavanja jednostavnijeg problema s četiri podjele datulja, jabuka, novčića ili manga (tri tajna osobna uzimanja tijekom noći i jedna javna grupna podjela ujutro). Tekstualna navođenja formulacije problema čine članak dužim te im je cilj pokazati kako autori jedan te isti matematički proces promjena kontekstualiziraju koristeći se manje ili više uvjerljivim pričama vrlo različitih duljina. Važno je napomenuti da dvije opisane važne epizode (podjela jabuka i novčića), u kojima su protagonisti bili Samuel Isaac Jones i Julio César de Mello y Souza, nisu spomenute u Singmasterovu minucioznom povijesnom prikazu različitih inačica problema objavljenih u knjigama i časopisima (Singmaster, 2021.).

Numerički odgovor bez postupka rješavanja

Iako je, prema sekundarnim izvorima (Delbos, 1891.; Lewis, 1893.), problem podjele manga (izomorfni problemu "majmuna i kokosa") bio i ranije prisutan u indijskom usmenom matematičkom folkloru, prvu udžbeničku inačicu razmatranog problema višestrukih promjena formulirao je i objavio Walter William Rouse Ball (slika 1). On je bio engleski matematičar, odvjetnik i član Trinity Collegea u Cambridgeu (1878. – 1905.).



Slika 1. Walter William Rouse Ball (1850. – 1925.)

Osim udžbenika elementarne algebre (Ball, 1890.; Ball, 1897.) Ball je objavio i zapažene knjige o povijesti matematike (Ball, 1888.) i rekreativnoj matematici (Ball, 1892.). Obje su doživjele mnoga izdanja.

Dok su u indijskoj folklornoj varijanti tri (ili četiri) čovjeka kupili ili imali plodove manga koje su dijelili na već spomenuti način s majmunom (Delbos, 1891.), Ball svoju udžbeničku priču smješta u arapski kontekst, dodatno pridružujući ljudima egzotičnu životnu profesiju i sakralnu destinaciju (Ball, 1890.; Ball, 1897., str. 260):

"Tri arapska žonglera putujući u Meku s majmunom koji je nastupao s njima, kupila su košaru datulja. U košari je bilo dovoljno

datulja da se podijele između trojice i da jedna ostane kao višak. Tijekom noći probudio se jedan žongler i nakon što je majmunu dao jednu datulju, potajno je pojeo jednu trećinu ostatka. Nakon toga, svaki od ostalih se redom probudio i nakon što je majmunu dao jednu datulju, potajno je pojeo trećinu preostalih datulja. Ujutro je ostalo dovoljno datulja da se podijele na jednake dijelove između trojice, a da opet jedna bude višak. Koliki je najmanji broj kupljenih datulja da bi to bilo moguće?"

U skladu sa svojim minimalističkim postupkom rješenja, Ball kao odgovor samo navodi broj 79 (Ball, 1890.; Ball, 1897., str. 475).

Takav pristup prihvatili su i neki autori knjiga rekreativne matematike (Kraitchik, 1930.; Problem 39 s rješenjem 79, str. 13; Kraitchik, 1953., Problem 35 s rješenjem 79, str. 32), iako se za neke jednostavnije probleme ipak navodio i postupak rješavanja.

Korisno je stoga pokazati da algebarsko nalaženje rješenja problema koje su formulirali Ball i Kraitchik nije ni najmanje jednostavno.

"Neka je početni broj datulja x .

Prvi žongler uzeo je trećinu i ostavio dvije trećine od $(x - 1)$, odnosno:

$$\frac{2}{3}(x - 1).$$

Drugi žongler uzeo je trećinu i ostavio dvije trećine od $\frac{2}{3}(x - 1) -$

$$1 = \frac{2(x - 1) - 3}{3} = \frac{2x - 5}{3}, \text{ odnosno:}$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{2x - 5}{3}\right) = \frac{4x - 10}{9}.$$

Treći žongler uzeo je trećinu i ostavio dvije trećine od $\frac{4x - 10}{9} -$

$$1 = \frac{4x - 10 - 9}{9} = \frac{4x - 19}{9}, \text{ a to je:}$$

$$\frac{8x - 38}{27}.$$

Prema uvjetima zadatka je taj ostatak jednak $3n + 1$, gdje n predstavlja broj datulja koje je svaki pojeo ujutro.

Dakle, dolazi se do diofantske jednadžbe:

$$8x = 81n + 65.$$

Rješenje se pronalazi kada jednadžbu napišemo u obliku:

$$x = \frac{81n}{8} + \frac{65}{8} = \frac{80n}{8} + \frac{n}{8} + \frac{64}{8} + \frac{1}{8} = 10n + 8 + \frac{n + 1}{8}.$$

Kako zbog konteksta problema x mora biti prirodni broj, moguće vrijednosti za n u izrazu $\frac{n + 1}{8}$ moraju biti takve da taj razlomak također bude prirodan broj.

Traženi najmanji broj datulja dobiva se kad je $n = 7$. Tad je vrijednost razlomka 1 pa je najmanji broj datulja 79 (jer je $10 \cdot 7 + 8 + 1 = 79$).

Kako se u ostalim formulacijama ne traži najmanji broj onoga što se dijeli, nego niz mogućih vrijednosti ili neka vrijednost veća od najmanje, korisno je navesti i vrijednosti koje slijede.

Za $n = 15$ vrijednost razlomka je 2, pa je sljedeći mogući broj datulja 160 ($10 \cdot 15 + 8 + 2 = 160$).

Za $n = 23$ vrijednost razlomka je 3 i mogući broj datulja je 241 ($10 \cdot 23 + 8 + 3 = 241$).

Za $n = 31$ vrijednost razlomka je 4 i mogući broj datulja je 322 ($10 \cdot 31 + 8 + 4 = 322$)."

U prvoj knjizi numerički odgovori, a u drugoj i postupak nalaženja rješenja

Dok je Kraitchik u brojnim izdanjima svoje knjige na francuskom i engleskom jeziku od 1930. do 1953. godine zadržao samo kratak odgovor u obliku brojke, Samuel Isaac Jones (1880. – 1937.) imao je drukčiji pristup. On je niz godina radio kao profesor matematike u nekoliko škola: Biblical and Literary College, Gunter, Texas; Alabama Christian College, Berry, Alabama i David Lipscomb College, Nashville, Tennessee. Zatim je negdje 1923. godine napustio posao profesora i zaposlio se kao pomoćnik blagajnika u jednoj kompaniji za osiguranje. Napisao je i samostalno objavio dvije izvrsne knjige rekreativne matematike (Jones, 1912.; Jones, 1932.).

U prvoj knjizi (Jones, 1912., str. 102–103) formulirao je sljedeću varijantu problema s podjelom ukradenih jabuka, tražeći njihove moguće početne brojeve:

Ukradena vreća jabuka

"Jedne su noći tri čovjeka, **A**, **B** i **C**, ukrala vreću jabuka i preko noći ih sakrila u staji s namjerom da ih ujutro podijele na jednake dijelove. Nešto prije jutra čovjek **A** otišao je u staju i podijelio je jabuke na tri jednaka dijela, pri čemu mu je jedna jabuka ostala kao višak pa ju je bacio. Čovjek **A** uzeo je jednu trećinu jabuka, a preostale je vratio u vreću. Nešto kasnije u staju je došao čovjek

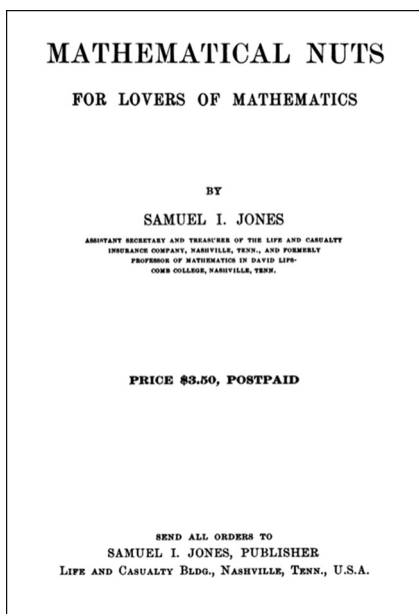
B i učinio točno isto što je učinio i čovjek *A*. Zatim je došao čovjek *C* koji je ponovio isto što su *A* i *B* učinili prije njega. Ujutro su se sastala sva trojica ne govoreći ništa o tome što su učinili tijekom noći. Preostale jabuke podijeljene su na tri jednaka dijela s još jednom jabukom viška. Koliko je jabuka bilo u vreći na početku?"

Odgovor je glasilo (Jones, 1912., str. 226):

"Vreća je sadržavala ili 79 ili 160 ili 241 ili 322 ili 403... jabuka."

Kako je Jones samostalno izdao i prodavao knjigu namijenjenu nastavnicima matematike i svima onima koji žele samostalno svladati vještine matematičkog mišljenja, vjerojatno je bilo čitatelja koji nisu znali kako se dolazi do spomenutog niza mogućih početnih brojeva ukradenih jabuka i koji su, bilo pismeno ili usmeno, tražili njegovu pomoć.

To je vjerojatan odgovor na pitanje zašto je Jones u svojoj drugoj knjizi (slika 2) ponovio problem i ponudio njegovo detaljnije rješenje.



Slika 2. Početna stranica Jonesove druge knjige *Matematički orasi za ljubitelje matematike* (Jones, 1932.)

Ponudeno rješenje sada je glasilo (Jones, 1932., str. 230):

"Neka x bude broj jabuka u vreći, a , b i c brojevi (jabuka) koje su tijekom noći uzeli *A*, *B* i *C* redom, a s broj jabuka koje je svatko

dobio sljedećeg jutra. Tada vrijedi:

$$x - 1 = 3a$$

$$x - 2 - a = 3b$$

$$x - 3 - a - b = 3c$$

$$x - 4 - a - b - c = 3s.$$

(Eliminiranjem nepoznanica a , b i c iz ovog sustava jednačbi) dobiva se:

$$8x - 81s = 65.$$

Rješavanjem za cjelobrojne vrijednosti x nalazimo da x može biti jednak svakom članu niza 79, 160, 241, ..., $(79 + 81n)$."

Lako je uočiti da se početno algebarsko modeliranje odlikuje konceptualnom očiglednošću i elegancijom. Međutim, izostavljeno nalaženje veze između x i s zahtijeva niz koraka pažljivog manipuliranja algebarskim izrazima za a , b i c . Pored toga, Jones izostavlja i netrivialan način nalaženja mogućih vrijednosti za x koji je prikazan u prethodno navedenom primjeru algebarskog modeliranja s razlomcima.

Dokazivanje ispravnosti numeričkog rješenja

Brazilski profesor matematike Julio César de Mello y Souza (slika 3), poznatiji pod književnim pseudonimom Malba Tahan, dao je razmatranom problemu raspodjele dva nova aspekta.



Slika 3. Julio César de Mello y Souza (1895. – 1974.)

Čitajući knjigu "Priče iz 1001 noći", de Mello y Souza još se kao dječak zaljubio u arapsko umijeće pripovijedanja. Kao profesor i didaktičar smatrao je da bi slične priče s matematičkim sadržajem mogle značajno pomoći u popularizaciji matematike. Tako je nastala čuvena knjiga *Čovjek koji je brojao*. Glavni junak knjige Beremiz Samir kroz 34 poglavlja opisuje zanimljive dogodovštine u svom životu. Svaka od njih na neki je način povezana s matematikom.

Prvo brazilsko izdanje knjige na portugalskom jeziku objavljeno je 1938. godine i do sada su zabilježena čak 63 izdanja. Knjiga je prevedena na 12 drugih jezika. Ta i ostale Tahanove knjige prodane su u više od 2 600 000 primjeraka.

Prvi aspekt Tahanove formulacije problema je obogaćivanje konteksta dodatnim avanturističkim elementima koji omogućuju dosljednu primjenu finesa arapske forme naracije. To je, naravno, rezultiralo značajnim produljenjem formulacije (Tahan, 2017., str. 99–100):

"Brod koji je iz Serendiba prevozio začinske trave iznenadila je snažna oluja. Bio bi uništen visokim valovima da nije bilo hrabrosti i napora trojice mornara koji su usred oluje krajnje spretno baratali jedrima.

Kapetan, želeći nagraditi predane mornare, dao im je određeni broj novčića. Taj broj bio je veći od dvije stotine, ali nije dosegao tri stotine. Novčići su bili spremniji u škrinju kako bi ih sljedeći dan, nakon iskrcavanja, carinik mogao razdijeliti trojci hrabrih mornara.

Dogodilo se, međutim, da se tijekom noći jedan od mornara probudio i, sjetivši se novčića, pomislio: "Bit će bolje da ja uzmem svoj dio. Tako neću morati raspravljati i svađati se sa svojim prijateljima." Ustao je i, ne rekavši ništa svojim prijateljima, otišao na mjesto gdje se nalazio novac. Podijelio ga je na tri jednaka dijela, ali je primijetio da podjela nije bila ravnomjerna i da je jedan novčić bio višak. 'Zbog ovog bijednog novčića sutra će doći do rasprave među nama. Bolje je da ga bacim', pomislio je. Mornar je bacio novčić u more i vratio se oprezno u postelju.

Tako je odnio svoj dio, a na isto mjesto je vratio dio koji je pripadao njegovim prijateljima.

Nekoliko sati kasnije, drugi mornar imao je istu ideju. Uputio se do škrinje u kojoj se nalazila zajednička nagrada i, ne znajući da je jedan od njegovih kolega već uzео svoj dio, podijelio je novac na tri jednaka dijela. Također je ostao jedan novčić viška. Mornar, da bi izbjegao buduće rasprave, pomislio je na isti način kako bi bilo najbolje baciti novčić u more, pa je tako i učinio. Poslije se vratio u svoju postelju, noseći dio za koji je vjerovao da mu s pravom pripada.

Treći mornar, koje li slučajnosti, imao je istu ideju. Na isti način, potpuno neupućen da su ga pretekla dva prijatelja, ustao je u zoru i otišao do škrinje s novčićima. Razdijelio je ono što je našao na tri jednaka dijela, ali je podjela ponovno bila nejednaka. Višak je bio jedan novčić i, kako ne bi komplicirao slučaj, i ovaj mornar je, također, odlučio baciti ga u more. Uzeo je svoju trećinu i vratio se miran u svoju postelju.

Sljedećeg dana, kad je kucnuo sat iskrcavanja, pronašao je carinik šaku novčića u škrinji. Podijelio ih je na tri jednaka dijela i dao svakom od mornara jedan od tih dijelova. Međutim, ni ovoga puta podjela nije bila savršena. Jedan novčić bio je višak, te ga je carinik uzeo sebi kao naknadu za posao i sposobnost. Naravno, niti jedan od trojice mornara nije se požalio jer je svatko od njih trojice bio uvjeren da si je već prisvojio iz škrinje dio novca koji mu je zapravo pripadao.

Posljednje pitanje: Koliko je novčića bilo na početku? Koliko je dobio svaki od mornara?"

Drugi aspekt Tahanova pristupa je problematično shvaćanje "potpunog rješenja problema". Zbog toga Beremiz priču nastavlja ovako:

"Budući da rečeno kako ih je bilo više od dvije stotine i manje od tri stotine, broj novčića je na početku morao biti **241**.

Prvi mornar ih je podijelio na tri jednaka dijela, višak mu je bio jedan novčić koji je bacio u more.

241 : 3 = 80 je kvocijent, a **1** ostatak.

Uzeo je trećinu i otišao ponovno leći. U škrinji je ostalo **241 – (80 + 1) = 160** novčića.

Drugi mornar je nastavio dijeljenje **160** novčića koje je ostavio njegov prijatelj. Ali, kad je završio podjelu, ostao mu je jedan novčić viška te ga je, također, odlučio baciti u more.

160 : 3 = 53 je kvocijent, a **1** ostatak.

Spremio je u džep svoj dio i vratio se u postelju. U tom trenutku u škrinji je samo ostalo **160 – (53 + 1) = 106** novčića.

Na isti je način i treći mornar podijelio **106** novčića na tri dijela, našavši da mu je višak jedan novčić. Zbog već navedenih razloga, odlučio ga je baciti u more.

106 : 3 = 35 je kvocijent, a **1** ostatak.

Nakon toga, uzeo je svoj dio i legao. U škrinji je ostavio **106 – (35 + 1) = 70** novčića.

U trenutku iskrcavanja, novčiće je preuzeo poreznik koji je, slijedeći naredbu kapetana, izvršio ravnomjernu razdiobu na tri mornara. Međutim, kad je razdioba završena, opazio je da nakon što je napravio tri dijela od 23 novčića, jedan mu je bio višak:

70 : 3 = 23 je kvocijent, a **1** ostatak.

Predao je svakom mornaru po 23 novčića i odlučio je zadržati za sebe novčić koji je bio višak.

Na kraju, podjela 241 novčića obavljena je na sljedeći način."

1. mornar:	$80 + 23 = 103$
2. mornar:	$53 + 23 = 76$
3. mornar:	$35 + 23 = 58$
Kraljev poreznik:	1
Bačeno u more:	3
Ukupno:	241

Dok je u nekim drugim pričama opisivao postupak kojim se dolazi do rješenja, Tahan u ovom slučaju ne navodi "matematički put" koji jasno vodi do broja 241. Zbog toga "potpuno rješenje problema" predstavlja, uz možda nepotrebno ponavljanje detalja priče, samo aritmetički dokaz da broj 241 doista zadovoljava uvjete zadatka.

Ni komentari u najnovijim izdanjima knjige nisu od velike pomoći čitateljima koji bi željeli razumjeti postupak koji vodi do navedenog rješenja. U 52. brazilskom izdanju (Tahan, 2000., str. 203) "pojašnjavajući komentar" glasi:

"Algebarskim resursima možemo naći opće rješenje za problem i navesti krajnju formulu za nalaženje nepoznatog (broja novčića).

Ako je x broj novčića, rješenje bi bilo:

$$x = 81k - 2,$$

gdje parametar k može imati vrijednost bilo kojeg prirodnog broja 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...

Vrijednosti za x bi bile: 79, 160, 241, 322, 403, 484...

Svaki član ovog niza mogao bi služiti kao ukupni broj novčića u problemu trojice mornara. Zbog toga je nužno limitirati vrijednost x .

Imajući u formulaciji problema tvrdnju da je broj novčića veći od 200 i da ne doseže do 300, *čovjek koji je brojao* prihvatio je vrijednost 241 koja je jedina zadovoljavala te uvjete."

U meksičkom izdanju (Tahan, 2017., str. 181) komentar je zagonetan. Naime, kao "pomoć" u razumijevanju rješenja spominje se na prvi pogled potpuno nepovezan algebarski problem:

"Podijeliti dani broj A na četiri dijela za koje vrijedi: povećanje prvog dijela za m , smanjenje drugog dijela za m , množenje trećeg

dijela brojem m i dijeljenje četvrtog dijela brojem m daju isti rezultat.

Moguće vrijednosti za x su: 79, 160, 241, 322, 403, 484...

Bilo koji član ovog niza može služiti kao ukupni broj novčića u problemu trojice mornara. Međutim, nužno je limitirati vrijednost x .

Uzimajući u obzir tvrdnju u formulaciji problema da je broj novčića veći od 200 i da ne doseže do 300, *čovjek koji je brojao* usvojio je broj 241 koji jedini zadovoljava te uvjete."

Rješavanja unatrag postupkom "pokušaja i pogreške"

Jedno moguće predstavljanje rješenja prethodnog problema za čitatelje, bez korištenja algebarskog modeliranja, predložila je Shakuntala Devi (slika 4). Ona je bila indijska autorica knjiga za popularizaciju matematike i matematičkog obrazovanja. Zbog svoje zadivljujuće sposobnosti mentalnog računanja dobila je nadimak "žena računalo".



Slika 4. Shakuntala Devi (1929. – 2013.)

Na Southern Methodist University u Dallasu (Texas), od Shakuntale Devi je 1977. godine traženo da izračuna 23. korijen od jednog broja sa 201 znamenkom. Odgovorila je nakon 50 sekundi. Točnost njenog odgovora je potvrđena uz pomoć specijalnog programa za računalo UNIVAC 1101, američkog Nacionalnog biroa za standarde. Računalo je za

realizaciju računa i nalaženje odgovora potrošilo 62 sekunde!

U Guinnessovu knjigu rekorda Devi je ušla 1980. godine jer je 18. lipnja na Imperial Collegeu u Londonu "u glavi" izračunala umnožak dvaju brojeva od 13 znamenaka (7 686 369 774 870·2 465 099 745 779). Za samo 28 sekundi, dobila je točan rezultat: 18 947 668 177 995 426 462 773 730!

Njezina najpoznatija knjiga *Puzzles to puzzle you* zbirka je koju čini 150 matematičkih zagonetki. Devi je problem predstavila kao svoju 144. zagonetku (Devi, 1976., str. 88):

Kradljivci manga

"Jedne su noći tri nestašna dječaka ukrala košaru punu manga iz vrta, sakrila plijen i otišla spavati. Prije nego su se povukli, brzo su prebrojali plodove i otkrili da ih je manje od stotinu.

Tijekom noći jedan se dječak probudio, prebrojao mango i otkrio da može podijeliti mango na tri jednaka dijela ako prvo uzme jedan za sebe. Zatim je uzeo jedan mango, pojeo ga i uzeo $\frac{1}{3}$ ostatka, sakrio ih zasebno i vratio se na spavanje.

Ubrzo nakon toga probudio se drugi dječak, prebrojao mango i ponovno je otkrio da se plijen može podijeliti na tri jednaka dijela ako uzme jedan za sebe. Pojeo je jedan mango, spremio $\frac{1}{3}$ preostalog u vreću, sakrio ih zasebno i vratio se na spavanje. Treći dječak se nakon nekog vremena probudio, učinio isto i zaspao.

Ujutro kada su se svi probudili i prebrojali svoja manga, otkrili su da ih ima za 1 više od broja koji se može podijeliti na tri jednaka dijela.

Koliko su manga dječaci ukrali?"

Put k aritmetičkom rješenju je kombinacija postupka "računanja unatrag" i metode "pokušaja i pogreške" (Devi, 1976., str. 135):

"Pretpostavljajući da su ujutro ostala samo 4 manga, to bi značilo da je treći dječak našao 7 manga kada se probudio tijekom noći. Kako 7 nije $\frac{2}{3}$ nekog cijelog broja, to je nemoguće.

Sljedeća mogućnost je da je ujutro ostalo 7 manga, što je opet nemoguće.

Potom ih je moglo biti 10 jer to $\frac{2}{3}$ od 15. To znači da je treći dječak pronašao 16 manga, uzeo jedan, a zatim uzeo još 5. Drugi dječak je tada morao naći 25 manga, uzeti jedan, a zatim još

8. Kako 25 nije $\frac{2}{3}$ nekog cijelog broja, pretpostavka da je ujutro ostalo 10 manga je apsurdna.

Sličnim zaključivanjem mogu se eliminirati brojevi 13, 16 i 19, ali će se ustanoviti da 22 zadovoljava tražene uvjete.

Treći dječak pronašao je 34, uzeo jedan i ostavio $\frac{2}{3}$ od 33 ili 22 manga. Drugi dječak je pronašao 52, uzeo je jedan i ostavio $\frac{2}{3}$ od 51 ili 34. Prvi dječak koji je pronašao 79 uzeo je 1 mango i ostavio $\frac{2}{3}$ od 78 ili 52 manga.

Odgovor je da su dječaci ukrali ukupno 79 manga."

Isti pristup rješavanju slijede i autori koji se problemom koriste kao ilustracijom primjene kritičkog mišljenja u rješavanju problema (Wheeler & Whiler, 1995., str. 45).

Kako iskoristiti ovaj problem u radu s učenicima?

Uzimajući u obzir njegovu ogromnu popularnost koja traje više od 130 godina, nema nikakve sumnje da će problem biti zanimljiv svim uzrastima učenika.

Slijedeći sugestiju Baira i Mooneya (2013.), za mlade se učenike problem može pojednostavniti time što će se u formulaciji precizirati da je u krajnjoj (četvrtoj) podjeli svaki žongler (čovjek, mornar ili dječak) dobio sedam datulja (jabuka, novčića ili manga). Na taj način učenici imaju priliku doći do traženog broja 79 metodom "računanja unazad" bez zamorne i frustrirajuće metode "pokušaja i pogreške".

Od učenika koji pohađaju gimnaziju i koji su ovladali vještinama algebarskog modeliranja treba, naravno, tražiti da te vještine što kreativnije primijene u nalaženju niza mogućih rješenja. Kao argument za važnost poticanja učeničke kreativnosti, korisno je napomenuti da Levitin & Levitin (2011., str. 174 – 175) kao najelegantnije rješenje za problem u kojem pet mornara dijeli kokosove orahe i u kojem majmun u svakoj podjeli dobiva po jedan, navode ono koje je 1958. godine predložio jedan gimnazijalac iz Južnoafričke Republike.

Ideja učeničkog rješenja može se predložiti u jednostavnijoj situaciji u kojoj tri mornara dijele kokose s majmunom. Koristeći se algebarskim simbolima iz Jonesova rješenja, jednačbe za promjene broja kokosa napišu se u sljedećem obliku:

$$x = 3a + 1$$

$$2a = 3b + 1$$

$$2b = 3c + 1$$

$$2c = 3s + 1.$$

Elegancija i originalnost nalaženja rješenja otkrivaju se u dva koraka. U prvom se i lijevoj i desnoj strani svake jednačbe doda 2:

$$x + 2 = 3(a + 1)$$

$$2(a + 1) = 3(b + 1)$$

$$2(b + 1) = 3(c + 1)$$

$$2(c + 1) = 3(s + 1).$$

Drugi korak je izjednačiti umnožak lijevih strana jednačbi s umnožkom desnih strana jednačbi. Dobiva se:

$$8(x+2)(a+1)(b+1)(c+1) = 81(a+1)(b+1)(c+1)(s+1)$$

ili

$$x + 2 = \frac{81}{8}(s + 1).$$

Da bi x i s bili prirodni brojevi, $s + 1$ mora biti djeljivo s 8. To znači da u završnoj (jutarnjoj) podjeli mornari mogu dobiti 7, 15, 23, 31... kokosa. Odgovarajući bi početni brojevi kokosa bili, kako je već pokazano, 79, 160, 241, 322...

Zamka za "brzomisleće" gimnazijalce mogao bi biti zadatak u kojem trebaju predvidjeti najmanji mogući početni broj datulja ako majmun u jutarnjem dijeljenju ne dobije ništa. Za one koji bi brzopleto dali odgovor 78 ($79 - 1 = 78$), bilo bi veliko iznenađenje saznati da je u tom slučaju točan odgovor 25 i da svaki žongler, umjesto ranijih 7, sada dobiva tek 2 datulje.

Problem može imati i dodatnu ulogu u razvijanju "računalnih vještina i kompetencija" ako se gimnazijalcima predloži zadatak da za nalaženje mogućih rješenja diofantske jednačbe koriste Excel ili Matlab.

LITERATURA

- 1/ S. L. Bair & E. S. Mooney (2013.): *Sailor monkeys, Mathematics Teaching in Middle School*, 18(7), 400.
- 2/ W. W. R. Ball (1888.): *A short account of the history of mathematics*, Macmillan, London.
- 3/ W. W. R. Ball (1890.): *Elementary algebra*, University Press, Cambridge.
- 4/ W. W. R. Ball (1892.): *Mathematical recreations and essays*, Macmillan, London.
- 5/ W. W. R. Ball (1897.): *Elementary algebra*, Second edition, University Press, Cambridge.
- 6/ L. Delbos (1891.): *Hindoo mathematics, The Journal of Education. A Monthly Record and Review*, 264, str. 378–381.
- 7/ S. Devi (1976.): *Puzzles to puzzle you*, Orient Paperbacks, New Delhi.
- 8/ M. Gardner (1958.): *Mathematical games, Scientific American*, 198(4), str. 118–125.
- 9/ S. I. Jones (1912.): *Mathematical winklers for teachers and private learners*, Samuel I. Jones, Gunter.
- 10/ S. I. Jones (1932.): *Mathematical nuts for lovers of mathematics*, Samuel I. Jones, Nashville.
- 11/ M. Kraitchik (1930.): *La mathématique des jeux o récréations mathématiques*, Steven Frères, Bruxelles.
- 12/ M. Kraitchik (1953.): *Mathematical recreations*, Dover Publications, New York.
- 13/ A. Levitin & M. Levitin (2011.): *Algorithmic puzzles*, Oxford University Press, Oxford.
- 14/ T. C. Lewis (1893.): *The mango problem, North Indian Notes and Queries: A Monthly Periodical*, 3(1), 27.
- 15/ D. Singmaster (2021.): *Adventures in recreational mathematics*, Chapter 13: "The monkey and the coconuts", str. 280, World Scientific Publishing, New Jersey.
- 16/ M. Tahan (2017.): *El hombre que calculaba*, Noriega Editores, Ciudad de México.
- 17/ M. Tahan (2000.): *O homem que calculava*. 52ª edição, Editora Recor, Rio de Janeiro.
- 18/ M. Tahan (2003.): *Čovjek koji je brojao*, Izvori, Zagreb.)
- 19/ R. E. Wheeler & E. R. Whiler (1995.): *Modern mathematics*, 9th edition, Brooks/Cole Publishing Company, Pacific Grove.