

Tko je prvi...

nešto dokazao matematičkom indukcijom?

Franka Miriam Brueckler,
Zagreb



Dok za većinu naših dosadašnjih pitanja "Tko je prvi ...?" vjerojatno niste odmah pomislili da znate točan odgovor, za naše novo pitanje vjerujem da će većina nastavnika matematike (i ostalih matematičara) pomisliti kako je odgovor **Giuseppe Peano** (1858. – 1932., slika 1). Svi znamo Peanove aksiome, od kojih je jedan aksiom matematičke in-



Slika 1. Giuseppe Peano,
Preuzeto s Wikipedije (*public domain*).

dukcije. Svoje aksiome prirodnih brojeva Peano je izložio 1891. i s njima postavio temelje aksiomatskog pristupa brojevima. No, time je samo modernizirao načelo poznato i korišteno stoljećima.

Temelji dokazivanja matematičkom indukcijom mogu se naći još 1000 i više godina prije Peana. Neki autori prvo korištenje pripisuju arapskom matematičaru Abu Kamilu (9./10. st.), drugi židovskom učenjaku Leviju ben Geršonu (13. st.), treći renesansnom znanstveniku Franciscusu Maurolycusu (16. st.), a četvrti znamenitom Blaiseu Pascalu (17. st.). Neki autori štoviše argumentiraju da se elementi matematičke indukcije mogu naći još kod Euklida (oko 300. g. pr. Kr.), a neki spominju i još neke druge potencijalne "prvake" matematičke indukcije. Zašto postoje tolika razilaženja? Glavni razlog je što u ranim izvorima uglavnom nalazimo naznake dokazivanja matematičkom indukcijom, ali ne i potpuno formaliziranje. Osvrnimo se dakle kratko na razloge zašto bi se ikome od navedenih pet "pred-peanovskih" ličnosti pripisalo da je prvi dokazivao matematičkom indukcijom.

Euklid Aleksandrijski u svojim "Elementima" daje dokaz da prostih brojeva ima beskonačno mnogo, odnosno kako on kaže: *više od bilo koje određene brojnosti*. Dokaz daje na primjeru pretpostavke da postoje tri prosta broja te dokazuje da onda mora postojati četvrti prosti broj, a iz teksta dokaza očito je da se umjesto 3 može uzeti proizvoljan pretpostavljeni broj n prostih brojeva i analogno pokazati da onda postoji i $(n + 1)$ -vi.

Abu Kamil bio je matematičar Arapskog kalifata, vjerojatno podrijetlom iz Egipta, a živio je otprilike od 850. do 930. godine. Poznat je kao prvi nastavljatelj algebre al-Hvarizmija te kao važan izvor za Leonarda Fibonaccija. U svojem djelu o algebri napisanom oko 900. godine, Abu Kamil na jednom mjestu (riječima, bez ikakve simbolike, kako je tada bilo uobičajeno) dokazuje identitet koji bismo danas zapisali kao

$$(2n + 1) \cdot \sum_{i=1}^n i = 3 \sum_{i=1}^n i^2.$$

Pritom on zapravo kreće od slučaja $n = 1$, koristeći se njime u dokazivanju slučaja $n = 2$, kojime dalje dokazuje slučaj $n = 3$ itd. do $n = 10$. Tu doduše staje, ali iako još nemamo eksplicitno spominjanje vrijednosti izraza u ovisnosti o varijabli n , Abu Kamil jasno kaže da se može ići tako dalje koliko god želimo. Dakle, iako to još nije moderni formalni dokaz metodom matematičke indukcije, načelo razmišljanja je jasno te se u kronološkom smislu ovaj Abu Kamilov dokaz može smatrati prvim (nesavršenim) dokazom tom metodom. Slični dokazi mogu se nešto kasnije naći i kod Al-Karadžija (953. – 1029.) i Al-Samavala (oko 1130. – 1180.), koji su dokazivali razne identitete vezane za binomni teorem i svojstva algebarskih operacija, ali još u starogrčkom, geometrijskom, stilu te identitete sa sumacijama poput navedenog Abu Kamilova, pri čemu kod Al-Karadžija i Al-Samavala nalazimo i "indukciju unatrag". Posebno je poznat primjer dokaza da je zbroj uzastopnih kubova prirodnih brojeva jednak kvadratu njihova zbroja, odnosno

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2,$$

što ne dokazuju za konkretne n , nego se od zadanog n "spuštaju" do 1 koristeći se odvojeno dokazanom tvrdnjom da je kub prirodnog broja jednak njegovom kvadratu uvećanom za zbroj njegovih prethodnika pomnožen s dvostrukim tim brojem.

Južnofrancuski židovski matematičar, filozof, astronom i teolog **Levi ben Geršon** (1288. – 1344.) svoja je djela pisao na hebrejskom, ali je već za života bio toliko ugledan da su prevedena na latinski te je poznat i pod latiniziranim imenom Gersonides. Kao i spomenuti arapski matematičari, njegov je stil dokaza još pod utjecajem klasičnog grčkog stila, gdje se brojevi predstavljaju dužinama, odnosno gdje su argumenti o brojevima geometrijski. Također, slično kao i oni, u dokazima algebarskih svojstava (npr. asocijativnosti množenja) navodi da se *tako može nastaviti korak po korak, dokazati do beskonačnosti*, s tim da je on prvi toj metodi dao ime (*hadragah*, litica koja je poput stepenica). Kao i prethodno spomenuti, njegovi argumenti "pate" od nedostatka matematičke notacije – u to doba još se sve tvrdnje i argumenti iskazuju riječima, notacija je postojala samo za geometrijske objekte (npr. AB za dužinu koja spaja točke A i B). Zašto ga onda spominjemo? Argument koji bi išao u prilog tome da Levija ben Geršona proglasimo autorom dokaza matematičkom indukcijom jest njegova praktična primjena metode u bitno širem rasponu, sustavno, u dokazima algebarskih i numeričkih identiteta (među ostalim i on dokazuje da je zbroj kubova jednak kvadratu zbroja) te kombinatornih tvrdnji. Najčešće prvo dokazuje lemu koja je (do na uporabu konkretnih brojeva) ekvivalentna modernom koraku indukcije, a zatim dokazuje slučaj $n = 1$ (bazu indukcije) i još daje konkretan primjer, odnosno kod njega je jasno razdvajanje baze i koraka indukcije.

Argument sustavne uporabe takve metode dokazivanja drugi autori navode u korist **Franciscusa Maurolycusa** (1494. – 1575., slika 2), renesansnog sicilijanskog matematičara, astronoma i opata. On je bitno doprinio ponovnom susretu Europljana s antičkim grčkim matematičkim rezultatima, a u svojem djelu *Arithmeticonum libri duo* (1557., tiskano 1575.) daje novu metodu za dokazivanje identiteta o figurativnim brojevima ("lakšu" od antičke).



Slika 2. Franciscus Maurolycus,
Preuzeto s Wikipedije (licenca CC-BY 4.0).

Maurolycius prvo tu metodu upotrebljava za neke jednostavne propozicije, a u nastavku i za sustavno dokazivanje složenijih teorema. Iako, kao i već spomenuti matematičari, u svojim dokazima ide samo do nekog konkretnog broja n i onda zaključuje da se tako može nastaviti “u beskonačnost”, dakle iako i kod njega još nemamo apstraktni korak indukcije, argument za pripisati prvu primjenu dokaza matematičkom indukcijom Maurolycius (uz sustavnost, ali nju imamo već i kod Levija ben Geršona) jest jasnoća njegova teksta jer je očito kako mu je dokazivanje matematičkom indukcijom razumljivo.

Svi oni matematički “puristi” kojima opisani tipovi dokaza još nisu zadovoljavajući da bi ih prihvatili kao prve dokaze matematičkom indukcijom, vjerojatno će se prikloniti argumentu da se prvi pravi dokaz matematičkom indukcijom pripíše znamenitom francuskom matematičaru, fizičaru i filozofu **Blaiseu Pascalu** (1623. – 1662., slika 3). Sam Pascal se uz jedan od svojih dokaza metodom matematičke indukcije eksplicitno poziva na Maurolycusa. Pascal tu metodu upotrebljava u dokazima raznih svojstava aritmetičkog trokuta (Pascalova trokuta). Njegova notacija još nije sasvim suvremena, ali u to je doba već dovoljno razvijena da je bilo moguće bitno jasnije zapisati varijabilne veličine u identi-

tetima. Kao primjer Pascalova dokaza matematičkom indukcijom, u kojem se jasno vidi kako u koraku indukcije upotrebljava varijabilni broj, navodimo (notacija je prilagođena suvremenoj, ali stil dokaza smo sačuvali) sljedeći teorem:

Teorem. Broj kombinacija od k objekata od njih n se prema broju kombinacija od $k + 1$ objekata od njih n odnosi kao $k + 1$ prema $n - k$, tj.

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{k+1}{n-k}.$$

Dokaz. *Prvi dio.* Provjerom je tvrdnja točna za $n = 2$. Tada su naime jedine moguće vrijednosti za k i $k + 1$ 1 i 2 pa je navedeni omjer $2 : 1$.

Drugi dio. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = q$. Dakle, pretpostavimo da je za sve prirodne brojeve $k < q$

$$\frac{\binom{q}{k}}{\binom{q}{k+1}} = \frac{k+1}{q-k}.$$



Slika 3. Blaise Pascal,
Preuzeto s Wikipedije (public domain).

Potrebno je dokazati da uz tu pretpostavku za sve prirodne brojeve $j < q + 1$ vrijedi

$$\frac{\binom{q+1}{j}}{\binom{q+1}{j+1}} = \frac{j+1}{q+1-j}.$$

Da to dokažemo, primjenjujemo dobro poznatu relaciju

$$\binom{N}{R} = \binom{N-1}{R-1} + \binom{N-1}{R}.$$

Prema njoj je lijeva strana jednakosti koju dokazujemo jednaka

$$\frac{\binom{q}{j-1} + \binom{q}{j}}{\binom{q}{j} + \binom{q}{j+1}} = \frac{\frac{\binom{q}{j-1}}{\binom{q}{j}} + 1}{1 + \frac{\binom{q}{j+1}}{\binom{q}{j}}}.$$

Primijenimo pretpostavljenu relaciju na razlomke

$$\frac{\binom{q}{j-1}}{\binom{q}{j}} \quad \text{ i } \quad \frac{\binom{q}{j+1}}{\binom{q}{j}}$$

pa je to jednako

$$\frac{\frac{j}{q-j+1} + 1}{1 + \frac{q-j}{j+1}} = \frac{j+1}{q-j+1},$$

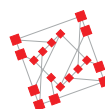
što je i trebalo dokazati.

Kao što vidimo, odgovor na pitanje iz naslova ovisi o tome što osobno smatramo ključnim za ovu metodu. Upitate li me za mišljenje, sklon sam prvenstvo dati Abu Kamilu jer su kod njega već svi bitni elementi jasno prisutni, ali naravno da svaki čitatelj može kao odgovor odabrati i nekog od ostalih navedenih matematičara. A tko zna, možda se jednom otkrije i neki drugi "original".

Za kraj napomenimo da je i naziv "matematička indukcija" stariji od Peana: Uveo ga je 1838. godine engleski matematičar i logičar **Augustus de Morgan** (1806. – 1871.), nakon što su već i prije njega neki matematičari (John Wallis, Jacob Bernoulli i dr.) upotrebljavali naziv "indukcija" za dokaze sličnog tipa. Naravno, izraz "indukcija" je puno stariji i izveden iz latinskog izraza *inductio* kojim je (navodno) Ciceron u 1. st. pr. Kr. preveo Aristotelov (4. st. pr. Kr.) izraz za (ne uvijek logički ispravan) način zaključivanja od posebnog prema općem.

LITERATURA

- 1/ W. H. Bussey (1917.): The Origin of Mathematical Induction, *Am. Math. Monthly* 5, str. 199–207.
- 2/ F. Cajori (1918.): Origin of the Name "Mathematical Induction", *Am. Math. Monthly* 25, str. 197–201.
- 3/ H. C. Kennedy (1974.): Peano's Concept of Number, *Hist. Math.* 1, str. 387–408.
- 4/ N. L. Rabinovitch (1970.): Rabbi Levi ben Gershon and the Origins of Mathematical Induction, *Archive for History of Exact Sciences* 6, str. 237–248.
- 5/ R. Rashed (1972.): L'induction mathématique: al-Karaji, as-Samaw'al, *Archive for History of Exact Sciences* 9, str. 1–21.
- 6/ G. Vacca (1909.): Maurolycus, the First Discoverer of the Principle of Mathematical Induction, *Bull. Am. Math. Soc.*, str. 70–73.
- 7/ M. Yadegari (1978.): The Use of Mathematical Induction by Abu Kamil Shuja Ibn Aslam (850 – 930), *Isis*, 69, str. 259–262.
- 8/ D. E. Yoyce: *Euclid's Elements*, <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>, pristupljeno 27. 10. 2021.



Hrvatsko
matematičko
društvo



Agencija
za odgoj i
obrazovanje

Vremeni natjecanja iz matematike

- školska razina: 15. veljače 2022.
- županijska razina: 24. ožujka 2022.
- državna razina: 9. – 11. svibnja 2022.