

Faktorizacija

Laura Horvat, Zagreb



Uvod

Mladi se zaljubljenik u matematiku od samih početaka svoje natjecateljske karijere susreće s razlomcima koje treba skratiti, zamršenim izrazima koje je potrebno pojednostavniti, jednadžbama s više nepoznanica koje pozivaju na rješavanje te brojnim drugim problemima iz šarolikog carstva algebre. Prilikom rješavanja takvih zadataka, možemo upotrijebiti vrlo snažno oružje: faktorizaciju.

Faktorizacija je, kao što samo ime kaže, zapisivanje matematičkog izraza u obliku umnoška nekoliko (dva ili više) faktora. Korisne metode koje nam pritom mogu pomoći su:

- izlučivanje zajedničkog faktora (distributivnost)
- grupiranje i dodavanje članova
- prepoznavanje algebarskih identiteta i formula.

Navedimo nekoliko važnih algebarskih identiteta:

- kvadrat binoma: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- kub binoma: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- razlika kvadrata: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

- zbroj/razlika kubova: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
- kvadrat trinoma: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Ne želimo prebrzo prenapregnuti svoje "male sive stanice", stoga krenimo sa zagrijavanjem!

Primjer 1.1. Izračunajte

$$\frac{202120212019 \cdot 202120212021 \cdot 202120212023}{100010001 \cdot (202120212021^2 - 4)}.$$

Školsko natjecanje 2021., 8. razred

Rješenje. Označimo zadani izraz s I . Budući da su brojevi uglavnom oko 202120212021, mudro je uvesti supstituciju $x = 202120212021$ i zapisati razlomak u obliku:

$$I = \frac{(x-2) \cdot x \cdot (x+2)}{100010001(x^2-4)}.$$

Primijenimo li formulu za razliku kvadrata na izraz

$x^2 - 4$, dobivamo:

$$I = \frac{(x-2)x(x+2)}{100010001(x-2)(x+2)} \\ = [\text{skratimo razlomak}] = \frac{x}{100010001}.$$

Primijetimo da je

$$x = 202120212021 = 2021 \cdot 100010001$$

i uvrstimo to u jednakost.

Tada vrijedi $I = \frac{2021 \cdot 100010001}{100010001}$, stoga je vrijednost zadanog izraza 2021.

Primjer 1.2. Riješite sustav jednažbi:

$$\begin{aligned} (x+y)^2 - z^2 &= 1 \\ (y+z)^2 - x^2 &= 5 \\ (z+x)^2 - y^2 &= 10. \end{aligned}$$

Državno natjecanje 2017., 8. razred

Rješenje. Iskoristimo najprije formulu za razliku kvadrata. Početni sustav sada je oblika:

$$\begin{aligned} (x+y-z)(x+y+z) &= 1 \\ (y+z-x)(y+z+x) &= 5 \\ (z+x-y)(z+x+y) &= 10. \end{aligned} \quad (1)$$

Primijetimo da su jednažbe slične te ih pokušajmo zbrojiti u nadi da će se nešto skratiti. Dobivamo:

$$\begin{aligned} [(x+y-z) + (y+z-x) \\ + (z+x-y)](x+y+z) &= 1 + 5 + 10 \\ (x+y+z)^2 &= 16 \\ x+y+z &= \pm 4. \end{aligned}$$

1. slučaj: $x+y+z = 4$.

$$\begin{aligned} x+y-z &= \frac{1}{4} \\ y+z-x &= \frac{5}{4} \\ z+x-y &= \frac{5}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Zbrajanjem po dvije jednažbe sustava (2) i dijeljenjem s 2, zaključujemo da je $x = \frac{11}{4}$, $y = \frac{3}{4}$ i $z = \frac{15}{8}$.

2. slučaj: $x+y+z = -4$. Iz (1) slijedi

$$\begin{aligned} x+y-z &= -\frac{1}{4} \\ y+z-x &= -\frac{5}{4} \\ z+x-y &= -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Ponovimo postupak kao u prvom slučaju i dobijemo $x = -\frac{11}{8}$, $y = -\frac{3}{4}$ i $z = -\frac{15}{8}$.

Konačno, uređene trojke koje zadovoljavaju početni sustav jednažbi su

$$\left(\frac{11}{8}, \frac{3}{4}, \frac{15}{8}\right) \text{ i } \left(-\frac{11}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{15}{8}\right).$$

Primjer 1.3. Faktorizirajte izraz $A = a^4 + 4b^4$.

Rješenje. Primijetimo da je

$$a^4 + 4b^4 = (a^2)^2 + (2b^2)^2$$

pa ćemo dodati i oduzeti $2 \cdot a^2 \cdot 2b^2 = 4a^2b^2$ kako bismo mogli iskoristiti formulu za kvadrat binoma.

$$A = (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2.$$

Kako je $4a^2b^2 = (2ab)^2$, mudro je dalje grupirati izraz kao

$$\begin{aligned} A &= [(a^2)^2 + (2b^2)^2 + 4a^2b^2] - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \end{aligned}$$

jer sada možemo iskoristiti formulu za razliku kvadrata:

$$\begin{aligned} A &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab). \end{aligned}$$

Ova je faktorizacija poznata kao *identitet Sophie Germain*. Identitet možemo ljepše zapisati koristeći se kvadratom binoma u dvjema zagradama:

$$\begin{aligned} A &= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab) \\ &= ((a-b)^2 + b^2)((a+b)^2 + b^2). \end{aligned}$$

Zadatci za vježbu

1. a) Je li broj $2015^4 + 4^{2015}$ prost?
 b) Pronađite sve prirodne brojeve a i b za koje je vrijednost izraza $A = a^4 + 4b^4$ prost broj.
Rješenje: $a = 1, b = 1$.

2. Faktorizirajte izraz

$$(b-c)(b+c)^3 + (c-a)(c+a)^3 + (a-b)(a+b)^3.$$

Općinsko natjecanje 1994., 1. razred

3. Odredite sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\begin{aligned}x^2 - y &= z^2 \\ y^2 - z &= x^2 \\ z^2 - x &= y^2.\end{aligned}$$

Državno natjecanje 2021., 1. razred, A varijanta

4. Neka su x i y različiti realni brojevi takvi da je $2xy + 1 \neq 0$ i neka su

$$\begin{aligned}A &= \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \quad \text{i} \\ B &= \frac{x(x^2 - 1) - y(y^2 - 1)}{x - y}.\end{aligned}$$

Odredite koji je broj veći, A ili B .

Županijsko natjecanje 2015., 1. razred, A varijanta

5. Faktorizirajte izraz $x^4 + x^2 + 1$.
Rješenje: $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Polinomi

Započnimo ovaj odjeljak s nekoliko definicija.

Polinom n -tog stupnja je funkcija $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dana s

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdje su $n \in \mathbf{N}_0, a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}, a_n \neq 0$.

Brojeve $a_0, \dots, a_n$ zovemo **koeficijentima polinoma**, a_n **vodećim koeficijentom**, a a_0 **slobodnim koeficijentom**.

Ako je $f \neq 0$, broj n zovemo **stupnjem polinoma** i pišemo $\deg f = n$.

Teorem (osnovni teorem algebre). *Svaki polinom n -tog stupnja s kompleksnim koeficijentima ima n nul-točaka u skupu kompleksnih brojeva.*

Primijetimo da se osnovni teorem algebre odnosi na polinome s kompleksnim koeficijentima, dok smo se u definiciji ograničili na polinome kao realne funkcije. Za potrebe ovog članka to će biti sasvim dovoljno, a osnovni teorem algebre naveden je kako bismo imali na umu da se svaki polinom n -tog stupnja s realnim koeficijentima može shvatiti kao polinom s kompleksnim koeficijentima (jer je $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$) te kao takav ima točno n kompleksnih nul-točaka, odnosno **najviše n realnih nul-točaka**.

Korisnom će se pokazati i činjenica da se svaki polinom stupnja n s n realnih nul-točaka može prikazati u faktoriziranom obliku kao $f(x) = a_n(x - x_1) \dots (x - x_n)$, pri čemu su $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ ne nužno različite nul-točke polinoma f , a a_n njegov vodeći koeficijent.

(*Kvadratna jednadžba*) Neka je zadan polinom drugog stupnja oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdje su $a \neq 0, b$ i c realni brojevi. Nul-točke polinoma f dane su formulom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Primjer 2.1. Neka je a realan broj. Odredite zbroj svih triju rješenja jednadžbe

$$x^3 - a^2x + ax - x + a^2 - a = 0.$$

Školsko natjecanje 2012., 1. razred, A varijanta

Rješenje. Definirajmo polinom $P(x) = x^3 - a^2x + ax - x + a^2 - a$. Primijetimo da su rješenja dane jednadžbe upravo nul-točke polinoma P .

Kada bismo polinom faktorizirali u obliku $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, pri čemu su x_1, x_2 i x_3 nul-točke, a vodeći koeficijent 1 , lako bismo mogli iščitati traženi zbroj rješenja. Pokušajmo!

$$\begin{aligned}
 P(x) &= x(x^2 - a^2) + x(a - 1) + a(a - 1) \\
 &= [\text{razlika kvadrata, izlučivanje } a - 1] \\
 &= x(x - a)(x + a) + (a - 1)(x + a) \\
 &= [\text{izlučimo } x + a] \\
 &= (x + a)(x^2 - ax + a - 1) \\
 &= [\text{grupirajmo 1. i 4. te 2. i 3. član}] \\
 &= (x + a)[(x - 1)(x + 1) - a(x - 1)] \\
 &= [\text{izlučimo } x - 1] \\
 &= (x + a)(x - 1)(x + 1 - a)
 \end{aligned}$$

Sada je jasno da su $x_1 = -a$, $x_2 = 1$, $x_3 = a - 1$ nul-točke polinoma P , iz čega slijedi da je zbroj rješenja $-a + 1 + (a - 1) = 0$.

Napomena. Učenici završnih razreda srednje škole mogu ovaj zadatak riješiti koristeći se Vi-
et-éovim formulama za polinome trećeg stupnja:
kako je koeficijent uz x^2 jednak 0, primjenom Vi-
et-éovih formula odmah slijedi da je zbroj rješenja
dane jednadžbe jednak nuli.

Primjer 2.2. Odredite sva rješenja jednadžbe

$$x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0.$$

Općinsko natjecanje 2004., 2. razred

Rješenje. Uvrštavanjem $x = 0$ u jednadžbu vidimo da 0 nije jedno od traženih rješenja, stoga cijelu jednadžbu možemo podijeliti s x^2 . Dobivamo

$$x^2 - x - 10 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = 0.$$

Primijetimo da je $\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 - 4 + \frac{4}{x^2}$ pa možemo grupirati jednadžbu na sljedeći način:

$$\left(x^2 + \frac{4}{x^2} - 4\right) - \left(x - \frac{2}{x}\right) - 6 = 0.$$

Uvedimo supstituciju $t = x - \frac{2}{x}$. Tada naša jed-
nadžba poprima oblik

$$t^2 - t - 6 = 0.$$

Koristeći se formulom za rješenja kvadratne jed-
nadžbe, dobivamo $t_1 = -2$ i $t_2 = 3$. Uvrstimo
sada ova rješenja u supstituciju.

Za $t_1 = -2$ je $x - \frac{2}{x} = -2$, tj. $x^2 + 2x - 2 = 0$.
Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Za $t_2 = 3$ je $x - \frac{2}{x} = 3$, tj. $x^2 - 3x - 2 = 0$.
Rješenja ove kvadratne jednadžbe su

$$x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

i time smo dobili sva rješenja početne jednadžbe.

Zadaci za vježbu

1. Nađite sve realne brojeve x takve da je

$$x^5 + 10x^3 + 11x = 0.$$

Rješenje: $x = 0$.

2. Zapišite polinom $P(x) = x^{100} + x^{20} + 1$ kao umnožak četiriju polinoma s cjelobrojnim ko-
eficijentima.

Pomoć: uvedite supstituciju $t = x^{20}$.

3. Rastavite izraz

$$(x^2 + 2x)^4 - (x^3 + 2x^2)^2 - (3x^2 + 6x)^2 + 9x^2$$

na faktore koji se ne mogu dalje rastaviti.

Općinsko natjecanje 2008., 1. razred, A varijanta

4. Nađite sva rješenja jednadžbe

$$\begin{aligned}
 (x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 \\
 = (3x^2 - 2x - 1)^3.
 \end{aligned}$$

Državno natjecanje 2002., 2. razred

Diofantske jednadžbe

Povežimo sada naučene trikove iz algebre s još
jednim vrlo važnim područjem matematike: teori-
jom brojeva.

Već su u drevnoj Aleksandriji jednačbe s koeficijentima i rješenjima u skupu cijelih brojeva intrigirale velike umove. Matematičar se Diofant u njihovu proučavanju istaknuo do te mjere da ih po njemu zovemo **diofantskim jednačbama**. Postoji nekoliko osnovnih metoda rješavanja diofantskih jednačbi, jedna od kojih je metoda faktorizacije. Bacimo se na zadatke!

Primjer 3.1. Odredite sve parove nenegativnih cijelih brojeva (x, y) za koje je $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$.

Rješenje. Kvadrirajmo lijevu stranu jednakosti:

$$x^2y^2 - 14xy + 49 = x^2 + y^2.$$

Pokušajmo se najprije riješiti kvadratnih članova na desnoj strani nadopunjavanjem do kvadrata zbroja, pa ćemo s obje strane jednakosti dodati član $2xy$:

$$\begin{aligned} x^2y^2 - 14xy + 49 + 2xy &= x^2 + 2xy + y^2 \\ x^2y^2 - 12xy + 49 &= (x + y)^2. \end{aligned}$$

Primijetimo da smo s lijeve strane vrlo blizu formuli za kvadrat razlike te dodajmo i oduzmimo član 6^2 koji nam nedostaje:

$$\begin{aligned} x^2y^2 - 2 \cdot 6 \cdot xy + 6^2 - 6^2 + 49 &= (x + y)^2 \\ (xy - 6)^2 - (x + y)^2 &= -13. \end{aligned}$$

Faktorizirajmo izraz koristeći se formulom za razliku kvadrata:

$$[xy - 6 - (x + y)][xy + 6 + (x + y)] = -13.$$

Rješenja tražimo u skupu cijelih brojeva, stoga izrazi u zagradama mogu biti samo cjelobrojni djelitelji broja 13. Budući da su x i y nenegativni, njihov je zbroj također nenegativan pa zaključujemo da je izraz u prvoj zagradi manji od izraza u drugoj. Javljaju se dva slučaja:

1. slučaj:

$$\begin{aligned} xy - 6 - (x + y) &= -13 \\ xy - 6 + (x + y) &= 1. \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih dviju jednačbi dobivamo $2xy - 12 = -12$, odnosno $xy = 0$. Uvrstimo li to u prvu jednačbu, proizlazi $x + y = 7$. Kombiniranjem

dvaju dobivenih uvjeta nalazimo sljedeća rješenja: $(0, 7)$ i $(7, 0)$.

2. slučaj:

$$\begin{aligned} xy - 6 - (x + y) &= -1 \\ xy - 6 + (x + y) &= 13. \end{aligned}$$

Ponovno zbrojimo jednačbe i dobivamo $2xy - 12 = 12$, odnosno $xy = 12$. Iz prve jednačbe sada slijedi $x + y = 7$. Parovi nenegativnih djelitelja broja 12 su $(1, 12)$, $(12, 1)$, $(2, 6)$, $(6, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, od čega samo posljednja dva zadovoljavaju drugi uvjet pa su oni jedina rješenja u ovom slučaju.

Dakle, parovi nenegativnih cijelih brojeva koji zadovoljavaju zadanu jednačbu su $(0, 7)$, $(7, 0)$, $(3, 4)$ i $(4, 3)$.

Primjer 3.2. Nađite sve prirodne brojeve m i n takve da vrijedi

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}.$$

Državno natjecanje 2007., 1. razred, B varijanta

Rješenje. Pomnožimo najprije jednakost s $5mn$ kako bismo se riješili razlomaka:

$$\begin{aligned} 5n + 5m - 5 &= 2mn \\ 5n + 5m - 5 - 5mn &= -3mn \\ 5m(1 - n) - 5(1 - n) &= -3mn \\ 5(m - 1)(n - 1) &= 3mn. \end{aligned}$$

Izraz je simetričan, a to znači da ako je $(m, n) = (a, b)$ rješenje jednačbe, tada je rješenje i $(m, n) = (b, a)$. Zato bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $m \geq n$.

Primijetimo da $m - 1$ dijeli lijevu stranu jednakosti, dakle, mora dijeliti i desnu. Kako su prirodan broj i njegov prethodnik uvijek relativno prosti te kako su 3 i 5 prosti brojevi, moguća su samo dva slučaja.

1. slučaj:

$$\begin{aligned} 5(n - 1) &= 3m \\ (m - 1) &= n. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je $n = 4$ i $m = 5$.

2. slučaj:

$$\begin{aligned} 5(n - 1) &= m \\ (m - 1) &= 3n. \end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava je $n = 3$ i $m = 10$.

Konačno, naša jednačba zbog prethodno obrazložene simetrije ima četiri rješenja: $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(3, 10)$, $(10, 3)$.

Zadaci za vježbu

1. Odredite sve parove cijelih brojeva (x, y) za koje vrijedi $x^4 + 68 = 4y^4$.

Županijsko natjecanje 2014., 1. razred, A varijanta

2. Odredite sve cijele brojeve m, n za koje vrijedi $m^3 + n^3 = (m + n)^2$.

Državno natjecanje 2006., 2. razred, A varijanta

3. Odredite sve prirodne brojeve x, y, z za koje vrijedi

$$4x^2 + 45y^2 + 9z^2 - 12xy - 36yz = 25,$$

pri čemu je $x < y < z$.

Državno natjecanje 2021., 1. razred, B varijanta

4. Pronađite sve parove (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednačbu

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 2(x - y)(1 - xy) = 4(1 + xy).$$

Rješenje: $(1, 2)$, $(-3, 0)$, $(0, 3)$, $(-2, -1)$, $(1, 0)$, $(-3, 2)$, $(0, -1)$, $(-2, 3)$.

5. Nađite sve trojke (x, y, z) prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednačbu:

$$2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2z^2x^2 - x^4 - y^4 - z^4 = 576.$$

Državno natjecanje 2002., 1. razred

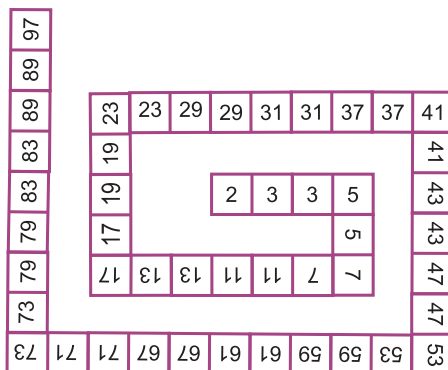
LITERATURA

- 1/ Zadaci s natjecanja iz matematike, <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/natjecanja-iz-matematike.htm>
- 2/ Predavanja udruge Mladi nadareni matematičari
- 3/ T. Andreescu, B. Enescu (2004.): *Mathematical Olympiad Treasures*, Birkhäuser Boston
- 4/ T. Andreescu, D. Andrica, I. Cucurezeanu (2010.): *An Introduction to Diophantine Equations*, Springer Science & Business Media

Zanimljivost o broju 2021.

Na kraju 2021. godine evo jedne zanimljivosti o tom broju.

Od svih prostih brojeva manjih od 100 formirajmo domino pločice na kojima su dva susjedna prosta broja (vidi sliku). Koliki je zbroj svih brojeva upisanih na te domine pločice?



Odgovor: 2021.