

Esej o decimalama

Lavoslav Čaklović, Zagreb



Prikazat ćemo i objasniti postupak dijeljenja brojeva koji se uči u osnovnoj školi. To nije jedini mogući postupak, no upravo taj postupak učenici trebaju razumjeti i uvježbati. Ovaj tekst prvenstveno je namijenjen roditeljima kako bi mogli djeci objasniti gdje griješe i pomoći im da lakše savladaju gradivo. Kao roditelj, učitelj i matematičar razumijem da su djeca razočarana ako nešto ne razumiju jer time gube povjerenje u vlastite mogućnosti. Algebarske operacije s brojevima danas su nezaobilazne i s njima se susrećemo svakodnevno i u svim situacijama.

Razumijevanje postupka dijeljenja čini se da nadiže kognitivne sposobnosti učenika u 5. razredu osnovne škole. Od njih se zahtijeva da usvoje postupak dijeljenja, pa makar i bez razumijevanja. Jedini način usvajanja postupka je vježbanje jednostavnih zadataka, a njih u udžbeniku ima zaista dovoljno. Neću pretjerati ako kažem da je 500 zadataka dovoljno za steći rutinu.

Korisna poveznica s nadopunama, zadatcima, primjerima i videozapisima je: *Digitalni obrazovni sadržaji – e-Škole*: <https://edutorij.e-skole.hr/share/page/home-page>. U polje za pretraživanje upišite "MATEMATIKA 5 – Modul 6" (s navodnicima).

U udžbenicima i dodatnim sadržajima ne objašnjava se zašto dijelimo tako kako dijelimo, objašnjava se tehnika, ali se ne potiče razumijevanje. Ovaj tekst namijenjen je nastavnicima, roditeljima i učenicima svih uzrasta koji žele razumjeti pozadinu računskih operacija. Ono što učenik 5. razreda osnovne škole treba usvojiti označeno je kao **Skraćeni postupak**. Sve je ostalo objašnjavanje zašto se to tako radi.

Dijeljenje decimalnih brojeva u osnovi koristi

- (1) dijeljenje prirodnih brojeva s ostatkom i
- (2) decimalni zapis broja.

To je dijeljenje u dekadskom sustavu prilagođeno našim svakodnevnim civilizacijskim rutinama. Objasniti ćemo jedno i drugo i upoznati se s nazivljem (terminologijom).

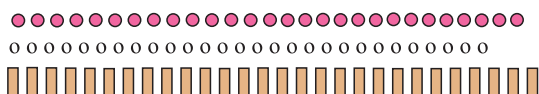
Koncept broja

Koncept, ideja ili zamisao broja nije dio naše svakodnevnice preokupacije. U školi su nas naučili kako zbrajamo $28 + 204$ i to koristimo na blagajni trgovine. Međutim, **28** nije broj. Da, dobro ste pročitali,

to nije broj, to je niz znamenaka koji predstavlja dekadski zapis

$$2 \cdot 10 + 8 \cdot 1.$$

A što bi bio broj? To je apstraktan pojam koji doživljavamo našim osjetilima. Neću puno pogriješiti ako kažem da je to nakupina istovrsnih objekata. Tako na primjer donji nizovi kuglica, slova, štapića ili zrnca graha



Slika 1.

predstavljaju (reprezentiraju) isti broj. Do brojeva imamo pristup samo putem njihovih reprezentata, a to su u gornjem primjeru kuglice, slova, štapići... Znamenka 8 predstavlja niz kuglica, a znamenka 1 kuglicu (slika 2).



Slika 2.

U dekadskom zapisu broja koristimo samo znamenke $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. U zapisu s bazom 5 koristimo samo znamenke $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ i zapis **103** u bazi 5

$$1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 3 \cdot 1$$

reprezentira isti broj kao i dekadski zapis **28**. Isti broj u binarnom zapisu (sa znamenkama $\{0, 1\}$) pišemo uz pomoć potencija broja 2 kao niz znamenaka **11100**, što predstavlja

$$1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 1.$$

Znamenku **0** koristimo kao naznaku da određena potencija baze nedostaje u razvoju po toj bazi.

Napomena. U daljnjem tekstu koristit ćemo dekadski zapis broja. Drugim riječima, **2801** je samo niz znamenaka i ako nije rečeno koju bazu koristimo, podrazumijevat ćemo da se radi o dekadskom zapisu, tj. bazi **10**.

Računanje i baratanje brojevima je računanje i baratanje dekadskim zapisima, a namjera ovog teksta

je objasniti kako se to reflektira na baratanje znamenkama.

Na prikaz broja u nekoj bazi pokušajte gledati kao na sučelje kojim rukovodite određenim procesom. Slično tomu, ikone na zaslonu vašeg računala imaju višestruku namjenu ovisno kliknemo li na njih lijevim ili desnim gumbom miša. Te ikone su pokretačka konzola za neke naredbe koje ne razumijete, ali se njima ipak koristite. Na kraju krajeva, ako radite u oblaku (internet), vi čak i ne znate je li vam odgovore vraća obično ili kvantno računalo ili neki svemirac.

Dekadski zapis i decimalni broj (detaljnije)

Dekadska jedinica jest svaka potencija broja **10**, tj. brojevi oblika $1 = 10^0, 10^2, 10^3, \dots$ kao i $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} \dots$. Dekadskih jedinica ima beskonačno mnogo. Oznaka 10^5 je skraćeni zapis za **100 000** (sto tisuća), a 10^{-3} je skraćeni zapis za **1/1000** (tisućinka). Potencija broja **10** u dekadskoj jedinici, ako je pozitivna, označava koliko puta broj **10** množimo sa samim sobom, a ako je negativna, onda je to recipročna vrijednost od dekadске jedinice s pozitivnom potencijom. Rezimirajmo:

$$\begin{aligned} 1 &= 10^0 \\ 10 &= 10^1 \\ 100 &= 10^2 \\ 1000 &= 10^3 \\ &\dots \\ 10^{-1} &= \frac{1}{10} \\ 10^{-2} &= \frac{1}{100} \\ 10^{-3} &= \frac{1}{1000} \\ &\dots \end{aligned}$$

Dekadski zapis koristi osnovne znamenke **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9** u kombinaciji s potencijama broja

10. Primjer dekadskog¹ zapisa je

$$20.16 = 2 \cdot 10 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{100} \quad (1)$$

i skraćeno ga zapisujemo nizom znamenaka **20.16** što smo i naznačili s lijeve strane znaka jednakosti. Taj niz znamenaka sačinjen je od koeficijenata decimalnog zapisa uz odgovarajuće dekadске jedinice. Broj nula (**0**) koristimo kao naznaku da neka dekadска jedinica nije prisutna u dekadskom zapisu, npr. u zapisu **201.602** nisu prisutne dekadске jedinice **10** i $\frac{1}{100}$.

Decimalna točka označava mjesto koje odjeljuje *cjelobrojni dio* dekadskog zapisa od *decimalnog dijela*. Decimalni dio zapisa koristi samo negativne potencije, a cjelobrojni dio samo pozitivne potencije uključujući i nulu. Krećući se udesno od decimalne točke, potencije padaju, a krećući se ulijevo od decimalne točke, potencije rastu. Brojeve **2, 0, 1, 6** u gornjem zapisu nazivamo znamenka desetica (D), jedinica (J), desetinka (d) i stotinka (s). Umjesto dekadskih jedinica u zapisu možemo koristiti i spomenute oznake, tako da zapis (1) možemo pisati i na način

$$20.16 = 2D + 0J + 1d + 6s,$$

uvažavajući odnos $D=10J$, $J=10d$, $d=10s$. Slove oznake u decimalnom zapisu prilagođene su učenicima nižih razreda osnovne škole. One su neprikladne za prikaz velikih/malih brojeva i za računanje.

Broj nulu (**0**) kao znamenku za decimalno mjesto poznavali su već i Babilonci, Maje, Indijci. Rimljani nisu imali oznaku za **0**. Od svih drevnih naroda Indijci su jedini koristili **0** kao broj u računskim operacijama.

Definicija (decimalnog broja). *Decimalni broj* je svaki niz znamenaka koje pripadaju nekom dekadskom zapisu s konačnim cjelobrojnim dijelom.

Napomena. Decimalni dio dekadskog zapisa može biti i beskonačan kao što je to **0.33333...** gdje se broj **3** pojavljuje beskonačno mnogo puta u decimalnom dijelu.

Jednakost decimalnih brojeva

Dva su decimalna broja jednaka ako su im svi koeficijenti u dekadskom zapisu uz odgovarajuće dekadске jedinice međusobno jednaki. Primjerice **201.6** i **20.16** nisu jednaki, tj. $201.6 \neq 20.16$. Ti brojevi koriste iste znamenke, ali uz različite dekadске jedinice.

Uspoređivanje decimalnih brojeva

Decimalne brojeve moguće je uspoređivati bez eksplicitnog razvijanja u dekadski zapis. Prvo se usporede koeficijenti uz vodeće potencije. Ako su jednaki, uspoređuju se koeficijenti uz sljedeće potencije itd. Primjerice

$$480.30 > 479.9999.$$

Isto tako je

$$48.03 > 9.99$$

jer je vodeća znamenka prvog broja koeficijent uz dekadsku jedinicu **10**, a vodeća znamenka drugog broja je koeficijent uz dekadsku jedinicu **1**.

Zbrajanje/oduzimanje decimalnih brojeva

Možda je to najbolje objasniti na primjeru. Treba zbrojiti brojeve **49.16** i **7.38**. U tu svrhu brojevima pridružimo njihov dekadski zapis i zbrojimo odgovarajuće koeficijente:

$$\begin{aligned} 49.16 &= 4 \cdot 10 + 9 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{100} \\ 7.38 &= 7 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{100} \\ 49.16 + 7.38 &= 4 \cdot 10 + 16 \cdot 1 + (3+1) \cdot \frac{1}{10} + (6+8) \cdot \frac{1}{100} \\ &= 4 \cdot 10 + 16 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{10} + 14 \cdot \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

Međutim, gornji razvoj nije dekadski zapis nekog decimalnog broja. On koristi dekadске jedinice, ali

¹ U nekom drugom sustavu, npr. s bazom 5 koristimo znamenke **0, 1, 2, 3, 4** u kombinacijama s potencijama broja 5.

svi koeficijenti u tom razvoju nisu osnovne znamenke iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Brojeve 16 i 14 treba zapisati u dekadskom razvoju i ponovno srediti izraz po dekadskim jedinicama:

$$\begin{aligned} &= 4 \cdot 10 + (10+6) \cdot 1 + 4 \cdot \frac{1}{10} + (10+4) \cdot \frac{1}{100} \\ &= 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} \\ &= 56.54. \end{aligned}$$

Skraćeni postupak:

$$\begin{array}{r} 49.16 \\ + 7.38 \\ \hline 14 \\ 4 \\ 16 \\ + 4 \\ \hline = 56.54 \end{array}$$

ili, ako pamtimo međukorake

$$\begin{array}{r} 49.16 \\ + 7.38 \\ \hline = 56.54 \end{array}$$

Napomena. Zbrajanje, bez obzira koliko bilo jednostavno, ukazuje na osnovnu proceduru u radu s dekadskim zapisom, a to je da koeficijent uz dekadsku jedinicu mora biti znamenka u skupu $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Ako to nije, onda taj koeficijent rastavljamo u dekadski zapis i dobiveni izraz ponovno sređujemo po potencijama od 10.

Za uvježbavanje te procedure *abak* ili *abakus* je izvanredno mentalno pomagalo. Ono omogućava i vizualizaciju i doživljaj operacija s decimalnim brojevima, što nije moguće postići olovkom i papirom. Pogodnosti računanja uz pomoć *abakusa* su koordinacija prstiju i mentalne aritmetike što dodatno razvija neuralnu komunikaciju među neuronima u mozgu. Šteta što je tako dragocjeno pomagalo izbačeno iz školskih klupa.

Pogledajte videozapis <https://www.youtube.com/watch?v=kxxZeLg3-sM> ili videozapis

<https://www.youtube.com/watch?v=rI2fx-kDYbY>. Ako kupujete *abakus*, za prvi susret s njim preporučam ovakav prikazan na prvom videozapisu.

Množenje decimalnog broja prirodnim brojem

Ovaj postupak prethodi dijeljenju jer fokusira pažnju na množenje dekadskog zapisa brojem. Treba imati na umu da je niz znamenaka koje nazivamo brojem samo simbol za dekadski zapis. Zbrajanje, množenje i dijeljenje su operacije koje činimo s dekadskim zapisima i razumijevanje tih operacija odnosi se na razumijevanje operacija s dekadskim zapisima.

Množenje decimalnog broja dekadskom jedinicom

Primjer. $1.23 \cdot 10 = 12.3$. Zaista,

$$\begin{aligned} 1.23 &= 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} / \cdot 10 \\ 1.23 \cdot 10 &= 1 \cdot 10 + \frac{2}{10} \cdot 10 + \frac{3}{100} \cdot 10 \\ &= 10 + 2 + \frac{3}{10} \\ &= 12.3. \end{aligned}$$

Za vježbu:

$$23.0045 \cdot 100 = 2300.45$$

$$23.0045 \cdot \frac{1}{100} = 0.230045.$$

Množenjem broja s 10, 100, 1000 dobivamo uvećani rezultat. Decimalna točka u umnošku pomaknuta je **udesno** za onoliko mjesta koliko nula ima dekadaska jedinica s kojom množimo.

Dijeljenjem broja s 10, 100, 1000 dobivamo umanjeni rezultat. Decimalna točka u rezultatu pomaknuta je **ulijevo** za onoliko mjesta koliko nula ima dekadaska jedinica s kojom množimo.

Napomena. Dodavanje nule (ili više njih) decimalnom dijelu ne mijenja vrijednost decimalnog broja. Na primjer $1.2300 = 1.23$.

Množenje decimalnog broja bilo kojim brojem

Za početak ćemo objasniti kako se decimalni broj množi cijelim brojem.

Primjer. Broj 58.16 množimo s 2 tako da njegov prikaz u dekadskom sustavu množimo s 2 :

$$\begin{aligned} 2 \cdot 58.16 &= 2 \cdot \left(5 \cdot 10 + 8 + 1 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{100} \right) \\ &= 10 \cdot 10 + 16 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 12 \cdot \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

Međutim, desna strana nije prikaz nekog broja u dekadskom sustavu jer $10, 16$ i 12 nisu osnovne znamenke iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Izraz treba dodatno popraviti koristeći se njihovim dekadskim zapisima:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 58.16 &= 100 + (10+6) + 2 \cdot \frac{1}{10} + (10+2) \cdot \frac{1}{100} \\ &= 1 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{100} \\ &= 116.32. \end{aligned}$$

Prethodni račun možemo sažeto zapisati množeći svaku znamenku broja s 2 i pravilno potpisivati uvažavajući njeno mjesto u dekadskom zapisu, a nakon toga zbrajati.

Skraćeni postupak:

$$\begin{array}{r} \underline{58.16 \cdot 2} \\ 10 \\ 16 \\ 2 \\ + \underline{12} \\ 116.32 \end{array}$$

Umnožak $8 \cdot 2 = 16$ potpisuje se ispod broja 8 , ali tako da broj 6 bude na istom decimalnom mjestu

kao i 8 . Tako se učini sa svim znamenkama i nakon toga se rezultati zbroje.

Još sažetiji zapis množenja postićemo ako se pamte međukoraci, rezultati množenja znamenaka. Množimo ih brojem 2 počevši od desnog kraja:

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot 6 = 12 & \text{— pišem 2 pamtim 1} \\ 2 \cdot 1 = 2 & \text{(pribrajam upamćeni 1) — pišem 3} \\ 2 \cdot 8 = 16 & \text{— pišem 6, pamtim 1} \\ 2 \cdot 5 = 10 & \text{(pribrajam upamćeni 1) — pišem 11,} \end{array}$$

odnosno

$$\begin{array}{r} \underline{58.16 \cdot 2} \\ 116.32 \end{array}$$

Množenje višeznamenkastim brojevima provodi se na isti način množeći broj sa svakom znamenkom, pazeći pritom na potpisivanje. Navodimo primjer bez komentara.

Skraćeni postupak:

$$\begin{array}{r} \underline{58.16 \cdot 28} \\ 1163.2 \\ + \underline{465.28} \\ 1628.48 \end{array} \quad \leftarrow \text{rezultat množenja}$$

Primijetite da u prvom redu ispod gornje crte stoji rezultat množenja s brojem 20 , kojem pribrajam rezultat množenja s brojem 8 .

Množenje dvaju decimalnih brojeva

Jedan od dvaju decimalnih brojeva, onaj s manje decimala, pomnožimo s dekadskom jedinicom tako da dobijemo cijeli broj i zatim umnožak tih brojeva podijelimo s istom dekadskom jedinicom.

Primjer.

$$\begin{aligned} 12.567 \cdot 3.82 &= 12.567 \cdot 3.82 \cdot \frac{100}{100} \\ &= \frac{12.567 \cdot 382}{100} \\ &= 48.04032. \end{aligned}$$

Zaokruživanje decimalnog broja

Pri zaokruživanju decimalnog broja prvo se određi decimalno mjesto na koje zaokružujemo. Ako je broj koji zaokružujemo jednak **4.8516**, a decimalno mjesto na koje zaokružujemo stotinka ($1/100$), onda u dekadskom zapisu tog broja odbacujemo dio koji sadrži dekadске jedinice manje od one na koju zaokružujemo, a to su tisućinke, desetstisućinke itd. Pritom pazimo je li znamenka tisućinka manja od 5 ili jednaka ili veća od 5. Ako je ona veća ili jednaka 5, znamenku stotinku povećamo za 1. Dakle, zaokružena vrijednost navedenog broja je **4.85**. U tablici niže dani su neki primjeri zaokruživanja.

broj koji zaokružujemo	decimalno mjesto na koje zaokružujemo	zaokruženi broj
4.8516	10^{-2}	4.85
4.8516	10^{-1}	4.9
12.999531	10^{-3}	13.000
273.82	10^0	274
273.82	10^1	270
273.82	10^2	300
273.82	10^3	0

Zaokruživanje na vodeću znamenku je zaokruživanje na najveću dekadsku jedinicu u dekadskom rastavu broja. Zaokruživanje na dvije vodeće znamenke je zaokruživanje na drugu po veličini dekadsku jedinicu itd. U tablici su dani neki primjeri zaokruživanja na vodeće znamenke.

broj koji zaokružujemo	broj vodećih znamenaka	zaokruženi broj
273.82	1	$3 \cdot 10^2$
273.82	2	$2.7 \cdot 10^2$
4.8516	3	4.85

Dijeljenje prirodnih brojeva (s ostatkom)

Postupak dijeljenja temelji se na dijeljenju prirodnih brojeva s ostatkom i na prikazu broja u dekadskom sustavu.

Pretpostavimo da želimo podijeliti dva prirodna broja, na primjer, $22 : 7$. Rezultat tog dijeljenja je 3, s ostatkom 1. Drukčije zapisano

$$22 = 3 \cdot 7 + 1,$$

odnosno

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}.$$

Ostatak (ovdje je to 1) je manji od djelitelja (ovdje je to 7), a može biti i jednak 0 (primjerice $21 = 3 \cdot 7 + 0$).

Nešto složeniji primjer. Treba podijeliti broj 825 brojem 6 i odrediti ostatak. Drugim riječima, treba zapisati broj 825 u obliku

$$825 = r \cdot 6 + o$$

gdje je $0 \leq o < 6$. Broj r je rezultat dijeljenja, a o je ostatak. Jedan od načina jest oduzimati broj 6 uzastopce sve dok ne dobijemo broj o koji je manji od 6 i pamtimo broj k koliko smo puta oduzimali. To bi moglo biti zamorno, pa se postavlja pitanje postoji li kraći postupak. Odgovor je potvrđan. Evo tog postupka.

Rastavimo 825 s pomoću dekadskih jedinica i vodeću znamenku 8 podijelimo sa 6 s ostatkom 2, $8 = 1 \cdot 6 + 2$

$$\begin{aligned} 825 &= 8 \cdot 100 + 25 \\ &= (6 + 2) \cdot 100 + 25 \\ &= 6 \cdot 100 + 225 \\ &= 6 \cdot 100 + 22 \cdot 10 + 5 \end{aligned}$$

međutim, $22 = 6 \cdot 3 + 4$

$$\begin{aligned} &= 6 \cdot 100 + (6 \cdot 3 + 4) \cdot 10 + 5 \\ &= 6 \cdot 100 + 6 \cdot 3 \cdot 10 + 45, \end{aligned}$$

međutim, $45 = 6 \cdot 7 + 3$

$$\begin{aligned} &= 6 \cdot 100 + 6 \cdot 3 \cdot 10 + 6 \cdot 7 + 3 \\ &= 6 \cdot (1 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7) + 3 \\ &= 137 \cdot 6 + 3. \end{aligned}$$

Dakle, $825 : 6$ jednako je 137 s ostatkom 3 .

Skraćeni postupak:

$$\begin{array}{r} 825 : 6 = 137 \quad \leftarrow \text{rezultat dijeljenja} \\ 22 \\ 45 \\ 3 \quad \leftarrow \text{ostatak} \end{array}$$

Dijeljenje decimalnih brojeva

U ovom ćemo dijelu objasniti kako se razlomak koji nije dekadski zapisuje u obliku decimalnog broja. Dijeljenje decimalnih brojeva je nakon toga jednostavno jer je kvocijent dvaju decimalnih brojeva razlomak. Primjerice

$$\frac{2.2}{1.51} = \frac{2.2}{1.51} \cdot \frac{100}{100} = \frac{220}{151}.$$

Napomena. Uputno je razlomak prije dijeljenja proširiti tako da nazivnik postane cijeli broj.

Približna vrijednost izraza

Prije samog dijeljenja, pogotovo dijeljenja višeznamenastim brojem, korisno je uvježbati zaokruživanje brojeva. Obično se brojevi zaokružuju na jednu ili dvije vodeće znamenke radi približnog računanja vrijednosti složenijeg izraza. Primjerice

$$\frac{295.586}{141.389} \cdot (6.78 - 1.247) \cdot 12.472$$

možemo približno izračunati na način da svaki broj zaokružimo na vodeću znamenku i zatim provedemo navedene algebarske operacije. Dakle, približna vrijednost gornjeg izraza je

$$\frac{3 \cdot 10^2}{1 \cdot 10^2} \cdot (7 - 1) \cdot 10 = 3 \cdot 6 \cdot 10 = 180$$

dok je točna vrijednost **146.6161**.

Zaokruživanje na dvije vodeće znamenke daje bolji rezultat

$$\frac{3.0 \cdot 10^2}{1.4 \cdot 10^2} \cdot (6.8 - 1.2) \cdot 12 = 146.5714 \approx 147.$$

Računanje približnih vrijednosti je mala umjetnost koja se uvježba s vremenom. Korisno je naglasiti da najveće pogreške pri zaokruživanju nastaju zaokruživanjem nazivnika.

Primjena zaokruživanja pri dijeljenju. Recimo da treba podijeliti $764 : 83$ i odrediti ostatak. Grubi račun proveden zaokruživanjem na vodeću znamenku daje rezultat dijeljenja $800 : 80 = 10$. Čini se da nismo puno pametniji ovom izvedbom, možda je pametnije brojnik i nazivnik podijeliti s 10 i zatim ih zaokružiti na cijeli broj. Dakle, $764 : 83 \approx 76 : 8 \approx 9$. Oдавde je

$$764 : 83 = 9.20481 \dots$$

$$\begin{array}{r} 170 \\ 400 \\ 680 \\ 130 \\ 47 \end{array}$$

Upućujem čitatelje na videozapis Antonije Horvatek, *Dijeljenje dvoznamenkastim brojem* <https://www.youtube.com/watch?v=ZAcS-vvCqq8> koji dodatno može pojasniti ono što je ovdje rečeno.

Razlomak kao decimalni broj

Postupak pretvaranja razlomka u decimalni broj provest ćemo na primjeru. Recimo da želimo podijeliti 23 s 8 , tj. razlomak $23/8$ želimo zapisati kao decimalni broj.

Ostatak pri dijeljenju broja 23 s 8 je 7 jer je

$$\begin{aligned} 23 &= 2 \cdot 8 + 7 \quad (\text{odnosno}) \\ \frac{23}{8} &= 2 + \frac{7}{8} \quad (\text{pamtim } 2!). \end{aligned}$$

Ovim prvim korakom odredili smo cijeli dio decimalnog broja (ovdje je to 2) od decimalnog dijela

koji još ne znamo. Sljedeći korak je razlomak $7/8$ zapisati kao decimalni broj.

$$\begin{aligned}\frac{7}{8} &= \frac{7}{8} \cdot \frac{10}{10} \quad (\text{proširivanje razlomka}) \\ &= \frac{70}{8} \cdot \frac{1}{10} \quad (\text{dijelim s ostatkom}) \\ &= \left(8 + \frac{6}{8}\right) \cdot \frac{1}{10} \\ &= 8 \cdot \frac{1}{10} + \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{10} \quad (\text{pamtim 8!}).\end{aligned}$$

Time smo izračunali desetinku decimalnog broja koja iznosi 8. Isti postupak nastavljamo s razlomkom $6/8$.

$$\begin{aligned}\frac{6}{8} &= \frac{6}{8} \cdot \frac{10}{10} \quad (\text{proširivanje razlomka}) \\ &= \frac{60}{8} \cdot \frac{1}{10} \quad (\text{dijelim s ostatkom}) \\ &= \left(7 + \frac{4}{8}\right) \cdot \frac{1}{10} \\ &= 7 \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{8} \cdot \frac{1}{10} \quad (\text{pamtim 7!}).\end{aligned}$$

Isti postupak nastavljamo s razlomkom $4/8$.

$$\begin{aligned}\frac{4}{8} &= \frac{4}{8} \cdot \frac{10}{10} \quad (\text{proširivanje razlomka}) \\ &= \frac{40}{8} \cdot \frac{1}{10} \quad (\text{dijelim bez ostatka}) \\ &= 5 \cdot \frac{1}{10} \quad (\text{pamtim 5! STOP}).\end{aligned}$$

Rezultat dijeljenja je

$$\frac{23}{8} = 2 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = 2.875.$$

Skraćeni zapis postupka dijeljenja

Ponovit ćemo opisani postupak u skraćenom zapisu. Takav zapis ubrzava račun, a dovoljno je pregledan da se usvaja bez napora. Naravno, treba razumjeti gore opisani postupak.

Skraćeni postupak:

$$\begin{array}{rcl}23 : 8 &= & \mathbf{2.875} \quad (23 : 8 = \mathbf{2} - \text{ostatak } 7) \\ 70 & & (70 : 8 = \mathbf{8} - \text{ostatak } 6) \\ 60 & & (60 : 8 = \mathbf{7} - \text{ostatak } 4) \\ 40 & & (40 : 8 = \mathbf{5} - \text{ostatak } 0) \\ 0 & & (\text{STOP})\end{array}$$

Komentare u zagradama korisno je pisati tijekom uvježbavanja, a kasnije ih možemo izostaviti.

U sljedećem je primjeru situacija nešto složenija jer je djeljenik decimalni broj.

Skraćeni postupak:

$$\begin{array}{rcl}23.58 : 8 &= & \mathbf{2.9475} \quad (23 : 8 = \mathbf{2} - \text{ostatak } 7) \\ 75 & & (75 : 8 = \mathbf{9} - \text{ostatak } 3) \\ 38 & & (38 : 8 = \mathbf{4} - \text{ostatak } 6) \\ 60 & & (60 : 8 = \mathbf{7} - \text{ostatak } 4) \\ 40 & & (40 : 8 = \mathbf{5} - \text{ostatak } 0) \\ 0 & & (\text{STOP})\end{array}$$

Beskonačni decimalni brojevi

U postupku računanja vrijednosti razlomka kao decimalnog broja može se dogoditi da postupak nema kraj, tj. ostatak je uvijek različit od 0. Evo primjera.

$$\begin{array}{rcl}7 : 3 &= & 2.33 \dots \\ 10 & & \\ 10 & & \\ \text{itd.} & & \end{array}$$

U ovom slučaju znamenka 3 se ponavlja beskonačno puta, što se označava kao $2.\dot{3}$ s točkom iznad znamenke koja se ponavlja. Ako se ponavlja grupa znamenaka, to se označava točkom iznad svake znamenke u toj grupi, primjerice $2.\dot{2}3\dot{4}$ što je skraćena oznaka za $2.234234234 \dots$