

Problem prelijevanja mlijeka

Denis Husadžić, Zagreb

U članku proučavamo problem prelijevanja mlijeka te predstavljamo dvije grafičke metode za rješavanje problema. Iznosimo teorem o egzistenciji rješenja uz određene uvjete te za ostale slučajeve opisujemo algoritam koji će u konačno mnogo koraka odrediti postoji li rješenje problema ili ne.

U nižim razredima osnovne škole pojavljuje se sljedeći problem:

Dvoje prijatelja imaju posudu od 8L ispunjenu mlijekom te ga žele podijeliti među sobom na jednake dijelove. Na raspolaganju imaju dvije prazne posude, jednu od 3L, a drugu od 5L. Kako to mogu učiniti prelijevanjem mlijeka iz posude u posudu ako posude nemaju na sebi nikakve mjerne oznake?

Ovaj problem ima dugu povijest u matematici. Elizabeth Cowley u svom članku kaže kako problem datira iz srednjeg vijeka [2] te navodi knjigu Claudea Gasparda Bacheta¹ s kraja 19. stoljeća u kojoj je proučavan navedeni problem. S druge strane, Kasner i Newman u svojoj knjizi spominju anegdotu prema kojoj se veliki matematičar i fizičar Siméon Denis Poisson odlučio baviti matematikom upravo zahvaljujući tome što mu je postavljen ovaj problem ([3], str. 160.). Problem se našao i u knjizi Coxetera i Greitzera *Geometry Revisited* kao motivacija za *trilinearne koordinate* ([1], str. 89.). Problem se javlja i u drugim izvorima u različitim varijantama. Metode rješavanja koje ćemo iznijeti u nastavku, dakle,



nipošto nisu nove. Cilj nam je napraviti ekspoziciju te pokazati na primjerima kako u nastavi možemo zadati analogne probleme.

Pojašnjenje pravila i prvo rješenje

Prvi problem s kojim se moramo suočiti u nastavi je razjasniti što se smatra dopuštenim u rješenju. Ključna rečenica iz teksta problema je: "Posude nemaju na sebi nikakve mjerne oznake." Time isključujemo trivijalna "zdravorazumska" rješenja poput: "prelijmo polovicu mlijeka iz najveće posude u onu od 5L" jer izostanak mjernih oznaka znači da ne možemo precizno odrediti polovicu, ili bilo koji drugi dio cijele posude. Dakle, jedini način da sa sigurnošću znamo koliko smo mlijeka prelili iz jedne posude u drugu je ako vrijedi barem jedno od

- (1) posuda u koju prelijevamo ispunji se do kraja,
- (2) posuda iz koje prelijevamo isprazni se do kraja.

Jasno je da ako smo znali stanje prije prelijeva-

Denis Husadžić, mag. math., Sveučilište u Zagrebu Prirodoslovno-matematički fakultet, denis.husadzic@gmail.com

¹ *Problèmes plaisants & Délectables qui se font par les nombres*, Gauthier-Villars, 1884.

nja i poštujemo (1) i (2), elementarnom aritmetikom ćemo znati i stanje nakon prelijevanja. Primjerice, ako prelijevamo iz pune najveće posude od 8 L u praznu posudu od 5 L, manja posuda će se ispuniti prije nego što se veća isprazni. Dakle, nakon prelijevanja u manjoj posudi imat ćemo 5 L mlijeka, a u većoj 3 L mlijeka. U nastavku ćemo takva prelijevanja zvati *potez*. Ako bismo sada iz posude od 5 L prelili mlijeko u posudu od 3 L, a zatim iz posude od 3 L prelili mlijeko u posudu od 8 L, imali bismo 2 L mlijeka u srednjoj te 6 L mlijeka u velikoj posudi. Niz prelijevanja možemo nastaviti, a da bismo riješili problem, želimo doći u stanje u kojem u dvije posude imamo po 4 L mlijeka, a treća posuda treba biti prazna. Takvu raspodjelu je jedino moguće postići tako da najmanja posuda bude prazna, dok preostale dvije sadrže svaka po 4 L. Sve to tablično možemo zapisati na sljedeći način:

3 L	5 L	8 L
0	0	8
0	5	3
3	2	3
0	2	6
⋮	⋮	⋮
0	4	4

Tablica 1

Jedan primjer nedopuštenog poteza već smo ranije naveli kao "zdravorazumsko" rješenje u kojem se polovica sadržaja prelije iz najveće u srednju posudu. Tablično:

3 L	5 L	8 L
0	0	8
0	4	4

Tablica 2

Takav potez ne zadovoljava niti (1) niti (2), što je u tablici jasno i vidljivo.

Za početak, problem možemo riješiti *metodom pokušaja i pogreške*. U tablicama vidimo dva moguća rješenja problema.

Kasnije ćemo vidjeti da su ova dva rješenja optimalna u smislu broja poteza potrebnih da se do

3 L	5 L	8 L
0	0	8
3	0	5
0	3	5
3	3	2
1	5	2
1	0	7
0	1	7
3	1	4
0	4	4

Tablica 3

3 L	5 L	8 L
0	0	8
0	5	3
3	2	3
0	2	6
2	0	6
2	5	1
3	4	1
0	4	4

Tablica 4

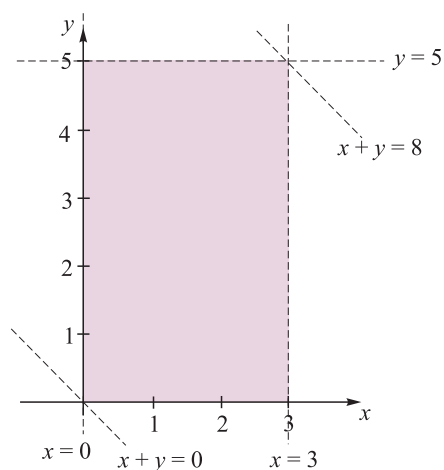
rješenja dođe. U ovom trenutku nemamo što dodati, metoda pokušaja i pogreške mogla je uroditi i sasvim drukčijim, ali i dalje valjanim tablicama. Kako nam broj poteza nije omeđen odozgo, čim postoji jedno rješenje, postoji ih i prebrojivo mnogo iz trivijalnog razloga – dodavanjem suvišnih poteza možemo po volji povećati duljinu rješenja. Za daljnju analizu potreban nam je jači alat, odnosno bolji prikaz stanja posuda i učinjenih poteza.

Grafički prikaz problema

Označimo s x količinu mlijeka u posudi od 3 L, s y količinu mlijeka u posudi od 5 L, a sa z količinu mlijeka u posudi od 8 L. Jasno je da su x, y, z cijeli brojevi te vrijedi $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 5, 0 \leq z \leq 8$, jer je svaka od veličina omeđena obujmom posude. Budući da nam se ukupna količina mlijeka ne mijenja, također vrijedi jednakost $x + y + z = 8$. Ako tu jednakost iskoristimo za supstituciju u nejednakost $0 \leq z \leq 8$, nakon sređivanja dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 3 \\ 0 &\leq y \leq 5 \\ 0 &\leq x + y \leq 8. \end{aligned} \quad (3)$$

Svaka od te tri nejednakosti određuje prugu u Kartezijevu koordinatnom sustavu te je skiciranjem lako vidjeti da je presjek tih pruga pravokutnik (slika 1). Nadalje, svako stanje u posudama (x, y, z) jedinstveno možemo prikazati kao točku (x, y) u koordinatnom sustavu. Jedinstvenost prikaza proizlazi iz relacije $x + y + z = 8$, tj. činjenice da se ukupna



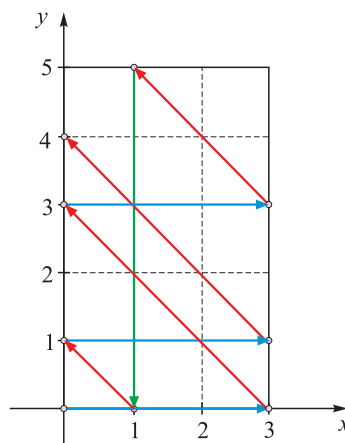
Slika 1.

količina mlijeka ne mijenja, pa je z određen s x i y . Sve retke iz tablice 3 unesimo kao točke u koordinatnom sustavu, a poteze kao vektore određene susjednim redcima (slika 2).

Na slici 2 možemo uočiti dvije bitne stvari. Prva se odnosi na točke – sve se nalaze na stranicama pravokutnika. Naime, to je posljedica pravila (1) i (2), jer se nakon svakog poteza neka posuda mora biti potpuno puna ili potpuno prazna. To znači upravo da se svaka točka nalazi na nekom od pravaca $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 5$, $z = 0$ ili $z = 8$, a to su točno pravci koji određuju pravokutnik na slici 1. Iznimka je početna točka $(0, 0)$. Ona se nalazi na rubu pravokutnika zbog početnog uvjeta u problemu, ne zbog pravila (1) i (2). Mogli smo zadati i početno stanje u posudama tako da ne budemo na rubu pravokutnika, nego u njegovoj unutrašnjosti.

Druga bitna stvar odnosi se na vektore – svi su paralelni nekom od pravaca $x = 0$, $y = 0$ ili $x + y = 0$. Razlog tomu je što se pri svakom potezu količina mlijeka mijenja u točno dvije posude, dok je u trećoj posudi količina mlijeka konstantna. To upravo znači da je neka od veličina x , y , z konstantna, dakle, vektor koji označava potez leži na nekom od pravaca oblika $x = c$, $y = c$, $x + y = 8 - z = c$, za neki cijeli broj c .

Uočimo da nikad ne dolazimo u vrh $(3, 5)$ jer se iz tog vrha jedino možemo vratiti u vrhove $(3, 0)$ ili $(0, 5)$, a to su i jedine točke iz kojih možemo



Slika 2.

doći u vrh $(3, 5)$. Dakle, njegovim posjećivanjem napravili bismo dva suvišna poteza. Također, osim u prvom potezu nikad ne radimo potez duž stranice pravokutnika. Ako bismo radili takav potez, zbog pravila (1) i (2) morali bismo završiti u nekom od vrhova pravokutnika. Tada bismo do tog vrha došli u dva ili više poteza računajući početni potez, potez duž ruba i poteze između. Međutim, do bilo kojeg vrha pravokutnika iz početnog stanja možemo doći u najviše dva poteza. Uzevši u obzir i komentar da nikad ne posjećujemo vrh $(3, 5)$, za svako rješenje koje osim početnog poteza sadrži bar još jedan potez duž ruba stranice pravokutnika možemo pronaći rješenje koje ne sadrži takav potez, a kraće je.

Pretpostavimo da tražimo najkraće rješenje problema i promotrimo trenutak kad se nalazimo u nekoj točki na stranici pravokutnika koja nije vrh. Iz nje imamo četiri moguća poteza. Dva su poteza duž te stranice koja odbacujemo zbog prethodne rasprave. Preostaju nam dva poteza, od kojih jedan nužno vodi natrag u točku iz koje smo došli prethodnim potezom. Dakle, preostaje nam samo jedna mogućnost. Ako se nalazimo u vrhu koji nije $(0, 0)$ ili $(3, 5)$, razlikujemo dva slučaja: ili smo u taj vrh došli potezom duž stranice pravokutnika te nam u tom slučaju preostaje samo jedan potez koji ne ide duž neke stranice, ili smo u taj vrh došli jedinim potezom koji nije duž stranice pravokutnika, nakon čega se jedino možemo vratiti u početno stanje ili vrh $(3, 5)$. Vrh $(3, 5)$ smo već ranije odbacili, dakle, preostaje nam vratiti se u početno stanje,

nakon čega se potezi počinju periodički ponavljati. Iz toga je jasno da su kandidati za najkraće rješenje dani isključivo izborom početnog poteza, dok su svi preostali potezi jedinstveno određeni. Iz početnog stanja našeg problema imamo dva moguća poteza. Ako se pridržavamo upravo opisanog postupka, ta će dva poteza rezultirati rješenjima danim tablicama 3 i 4. Time smo opravdali raniju tvrdnju da su ta dva rješenja optimalna.

Označimo s **A** najmanju, s **B** srednju, a s **C** najveću posudu. Tada gore opisani algoritam preciznije možemo zapisati na sljedeći način:

1. iz **C** prelijevamo u **A**
2. iz **A** prelijevamo u **B**
3. ako **B** nije puna, vratimo se na 1, ako je **B** puna, onda iz **B** prelijemo u **C**, pa se vratimo na 2.

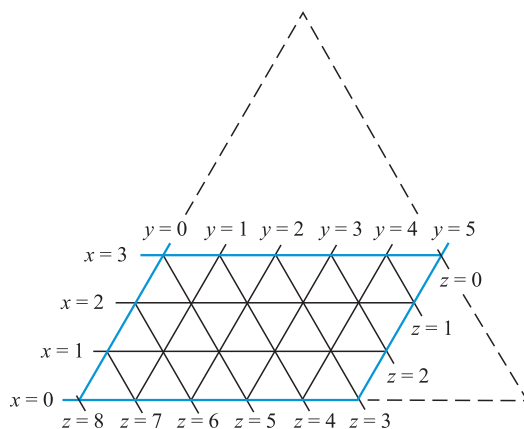
Ovaj će algoritam dati tablicu 3. Zamjenom oznaka **A** i **B** dobivamo tablicu 4.

Budući da mogućih stanja posuda i poteza imamo konačno mnogo, u nekom će trenutku gore opisani algoritam početi periodički ponavljati stanja i poteze. Da tada nismo već prošli točkom **(0, 4)**, zaključili bismo da problem nema rješenje.

Drugi grafički prikaz problema

Vidjeli smo kako problem grafički prikazati u Kartezijevu koordinatnom sustavu, no takav pristup ima manu što nije dostupan učenicima nižih razreda osnovne škole. Iz tog razloga pokazat ćemo još jedan način da se problem prikaže grafički. Novi se grafički prikaz neće esencijalno razlikovati od prethodnog, ali moguće ga je predstaviti učenicima bez poziva na koordinatni sustav.

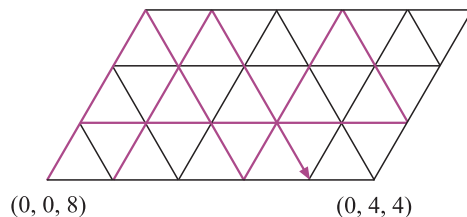
Uz iste oznake kao u prethodnoj točki, uočimo da jednačina $x + y + z = 8$ određuje ravninu u trodimenzionalnom Kartezijevu koordinatnom sustavu. Ako dodamo uvjete $x, y, z \geq 0$, tada dobivamo jednakostraničan trokut s vrhovima **(8, 0, 0)**, **(0, 8, 0)** i **(0, 0, 8)** jer je riječ je o presjeku ravnine $x + y + z = 8$ s prvim oktantom, a navedeni vrhovi su upravo sjecišta ravnine i koordinatnih osi.



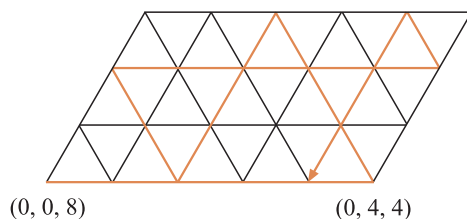
Slika 3.

Retke iz tablice 3, odnosno 4 možemo interpretirati kao točke u trodimenzionalnom prostoru. Alternativno, retke je moguće interpretirati kao trilinearne koordinate u odnosu na navedeni jednakostranični trokut. Ovdje se nećemo time baviti, ali detalji se mogu pronaći u [1], kako smo već naveli u uvodu. Konačno, moramo uzeti u obzir i obujme posuda, tj. nejednadžbe $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 5$, $0 \leq z \leq 8$ te nam od jednakostraničnog trokuta ostaje paralelogram kao što možemo vidjeti na slici 3. Dobiveni paralelogram je u potpunosti analogan pravokutniku sa slike 1. Štoviše, taj pravokutnik je ortogonalna projekcija paralelograma na xy -ravninu. Napomenimo da se slika 3 može pronaći i u [4].

Ako unesemo retke iz tablice 3, odnosno 4 te obojamo odgovarajuće poteze, dobit ćemo slike 4 i 5.



Slika 4.

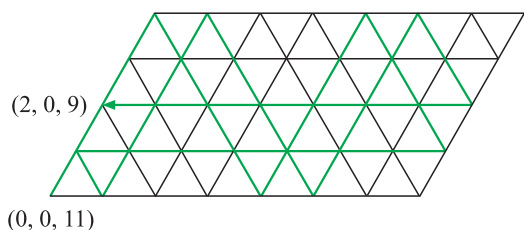


Slika 5.

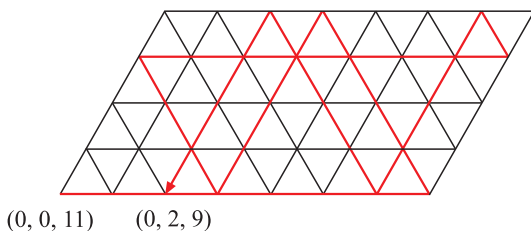
Analiza problema koju smo proveli u prethodnoj točki potpuno se analogno provodi i za ovaj prikaz, no uočimo da potezi izgledaju prirodnije nego u Kartezijevu sustavu: svi su paralelni nekoj od stranica jednakostraničnog trokuta. Nadalje, u ovom grafičkom prikazu potezi poštuju zakon refleksije. Stoga ovu metodu možemo predstaviti učenicima bez pozivanja na koordinatni sustav. Preostaje nam pokazati još nekoliko primjera.

Primjer 1. Neka su dane prazne posude obujmova 4 L i 7 L te neka je dana posuda obujma 11 L ispunjena mlijekom. Je li moguće izmjeriti točno 2 L mlijeka prelijevanjem?

Skicirajmo paralelogram stranica duljina 7 i 4 te ga podijelimo na jednakostranične trokute. Vrh paralelograma dolje lijevo ima koordinate $(0, 0, 11)$, a gore desno $(4, 7, 0)$. Budući da se pomicanjem duž pravaca paralelnih stranicama paralelograma z-koordinata mijenja linearno, sve točke unutar paralelograma imaju z-koordinatu u segmentu $[0, 11]$, što je u skladu s obujmom najveće posude. Početno stanje odgovara točki $(0, 0, 11)$, a završno točkama $(2, 0, 9)$ ili $(0, 2, 9)$. Cilj nam je iz početnog stanja doći u jednu od završnih točaka krećući se duž stranica jednakostraničnih trokuta od ruba do ruba paralelograma poštujući zakon refleksije. Iz početnog stanja imamo samo dva moguća poteza, otići u neki od susjednih vrhova paralelograma, dok su svi ostali potezi jedinstveno određeni. Konačno, dobivamo sljedeća dva rešenja:



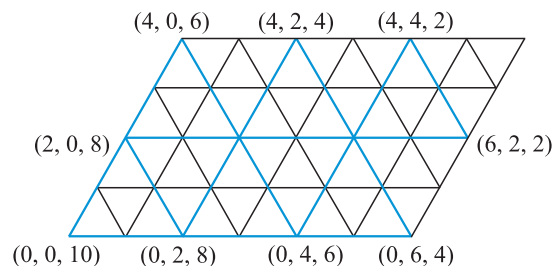
Slika 6.



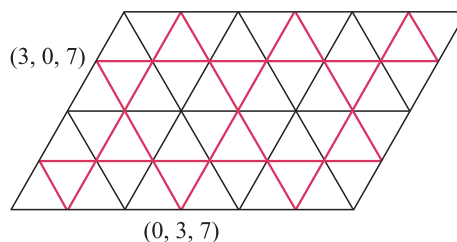
Slika 7.

Primjer 2. Neka su dane prazne posude obujmova 4 L i 6 L te neka je dana posuda obujma 10 L ispunjena mlijekom. Je li moguće izmjeriti točno 3 L mlijeka prelijevanjem?

Kao i u prethodnom primjeru, možemo skicirati paralelogram stranica duljina 6 i 4 te ga podijeliti na jednakostranične trokute. Vrhovi paralelograma dolje lijevo i gore desno imaju koordinate $(0, 0, 10)$ i $(4, 6, 0)$, stoga sve točke unutar paralelograma imaju z-koordinatu u segmentu $[0, 10]$, u skladu s obujmom najveće posude. No, uočimo da se primjenom našeg algoritma počevši iz vrha $(0, 0, 10)$ uvijek vraćamo u početnu točku bez obzira na izbor početnog poteza, a pri tome se nećemo zaustaviti u točkama $(3, 0, 7)$ ili $(0, 3, 7)$ (slika 8). Alternativno, ako pokušamo rekonstruirati potrebne poteze krenuvši iz neke od završnih točaka, primijetit ćemo da dobivamo zatvorenu petlju koja ne prolazi niti jednim vrhom paralelograma (slika 9). Stoga zaključujemo da nije moguće izmjeriti točno 3 L mlijeka.



Slika 8.



Slika 9.

Pažljivim promatranjem koordinata možemo uočiti da je moguće izmjeriti samo količine mlijeka djeljive s 2, najvećim zajedničkim djeliteljem 4 i 6. Ustvari, ova opservacija vrijedi općenito.

Teorem. Neka su dane prazne posude obujmova A i B te neka je dana posuda obujma $A + B$ ispunjena mlijekom. Tada je prelijevanjem moguće

izmjeriti točno n litara mlijeka ako i samo ako najveći zajednički djelitelj A i B dijeli n .

Izostavit ćemo detalje dokaza, ali dovoljno je uočiti da naš algoritam modelira modularnu aritmetiku. Primjerice, u posudi B algoritam daje količine $kA \pmod{B}$, pa je u posudi B moguće izmjeriti samo količine oblika $kA + lB$ za neke cijele k, l . No, općenito znamo da linearna diofantska jednadžba $kA + lB = n$ ima rješenja ako i samo ako najveći zajednički djelitelj A i B dijeli n .

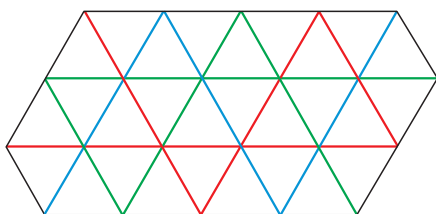
Napominjemo da se linearne diofantske jednadžbe prema aktualnom Predmetnom kurikulumu obrađuju u prvom razredu srednjih škola koje imaju barem 175 sati matematike godišnje, tj. barem 5 sati matematike tjedno. Veza između problema prelijevanja mlijeka i linearne diofantske jednadžbe detaljnije je istražena u [2].

Dosada smo gledali samo primjere u kojima su dane dvije prazne posude te ispunjena posuda obujma dana zbrojem obujmova dviju manjih posuda. Pogledajmo primjer u općenitijoj situaciji.

Primjer 4. Neka su dane posude obujmova 3 L, 5 L i 6 L te neka je ukupna količina mlijeka u svim posudama 7 L.

Kao i ranije, skicirajmo paralelogram stranica duljina 5 i 3. Uočimo tada da vrh dolje lijevo ima koordinate $(0, 0, 7)$, a vrh gore desno $(3, 5, -1)$. Kako je obujam najveće posude 6 L, sve z -koordinate moraju biti u segmentu $[0, 6]$, stoga moramo izbaci točke iz paralelograma koje imaju z -koordinate izvan tog segmenta. Preostaje nam šesterokut čije su nasuprotne stranice paralelne. Vrhove tog šesterokuta možemo povezati dozvoljenim potezima koji ne idu duž stranica šesterokuta.

Kao što vidimo na slici 10, sve točke na stranicama šesterokuta cjelobrojnih koordinata su obojene

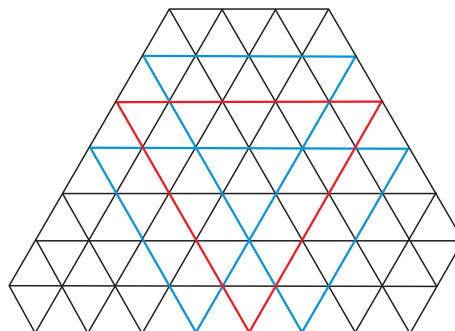


Slika 10.

nekom od boja, što znači da ih možemo posjetiti krenuvši iz odgovarajućeg vrha. Kako iz svakog vrha šesterokuta krećući se duž stranica možemo u najviše tri poteza doći do bilo kojeg drugog vrha, zaključujemo da problem prelijevanja ima rješenje bez obzira na početno i završno stanje.

Općenito, umjesto paralelograma, s obzirom na zadane uvjete možemo dobiti trokut, četverokut, peterokut ili šesterokut. Također, moguće je da problem neće uvijek imati rješenje bez obzira na to jesu li obujmi relativno prosti ili ne.

Primjer 5. Neka su dane posude obujmova 7 L, 8 L i 9 L te neka je ukupna količina mlijeka u posudama 10 L. Tada ne možemo izmjeriti 4 L niti 6 L, osim ako počnemo u stanju kojem je jedna koordinata 4 ili 6. Ne možemo izmjeriti niti 5 L, osim ako počnemo u stanju kojem je jedna koordinata 5.



Slika 11.

LITERATURA

- 1/ H. S. M. Coxeter and Samuel L. Greitzer (1967): *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America.
- 2/ E. B. Cowley (1926): Note on a linear diophantine equation, *The American Mathematical Monthly*, 33(7): 379. – 381.
- 3/ J. Kasner and E. Newman (1949): *Mathematics and the imagination*, G. Bell and sons.
- 4/ M. C. K. Tweedie (1939): A graphical method of solving tartaglian measuring puzzles, *The Mathematical Gazette*, 23(255): 278. – 282.