

Metoda invarijanti



Maja Drmač, Manchester

Uvod

Često se na matematičkim natjecanjima pojavljuje sljedeći tip kombinatornog zadatka: zadan je proces s dozvoljenim skupom poteza, najčešće u obliku igre, te je potrebno odrediti može li se iz određenog početnog stanja postići neko drugo određeno stanje. Kako je za odgovor DA potrebno samo naći neki niz dozvoljenih poteza, uglavnom je odgovor NE te se zadatak svodi na dokazivanje da nije moguće postići to stanje.

U tom slučaju, jedna od osnovnih strategija pri rješavanju je traženje **invarijanti**. Invarijanta je svojstvo koje se u nekom procesu ne mijenja pri prelasku iz koraka u korak po zadanom pravilu. Metoda invarijanti je metoda rješavanja zadataka s pomoću invarijante.

Pronalazak invarijanti je koristan zbog toga što nam olakšava rješavanje nekih zadataka tako da usporedimo stanje na početku procesa sa stanjem koje je zadano. Ako se vrijednosti invarijante u tim stanjima ne podudaraju, sa sigurnošću možemo zaključiti da ne možemo doći do traženog stanja! No,

u suprotnom treba biti jako oprezan jer podudaranje vrijednosti invarijante na početku te u zadanom stanju ne garantira da se to stanje može postići – treba naći valjani niz poteza kojim se postiže to stanje (ili provesti dokaz nekom drugom metodom).

Sam proces rješavanja zadatka metodom invarijanti možemo podijeliti na 3 osnovna dijela: određivanje (naslućivanje) invarijante, dokazivanje te slutnje te primjena invarijante koja vodi do rješenja.

U zadacima gdje su objekti brojevi, najčešće invarijante koje se pojavljuju su:

- zbroj/umnožak brojeva
- parnost zbroja/umnoška
- broj brojeva s nekim svojstvom (npr. broj parnih brojeva)
- djeljivost zbroja/umnoška nekim brojem ili ostatak koji zbroj/umnožak daju pri dijeljenju nekim brojem.

Na prvi pogled nema neke jasne, fiksne metode kako primijetiti invarijantu u zadatku – zato je bitno proći kroz mnogo različitih primjera i zadataka te izvježbati najčešće trikove.

Maja Drmač, Udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić", Zagreb, mnm@mnm.hr

Neki primjeri

Primjer 1.1. Marin je na ploču napisao brojeve 2 i 3. Par brojeva (x, y) može zamijeniti s $\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}y, \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y\right)$, ili s $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$ ili s (y, x) . Može li Marin ikada doći do brojeva $\left(\frac{5}{6}, \frac{11}{8}\right)$?

Rješenje. Prvo jasno iskažimo naše dozvoljene poteze:

$$\begin{aligned}(x, y) &\rightarrow \left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}y, \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y\right) \\ (x, y) &\rightarrow \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) \\ (x, y) &\rightarrow (y, x).\end{aligned}$$

Pogledajmo koeficijente uz x i y u svakom potezu. U prvom potezu, u početnom stanju uz x i y stoji koeficijent 1, dok su u završnom uz x koeficijenti $\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{3}$, a uz y koeficijenti $\frac{5}{4}$ i $-\frac{1}{4}$. Primijetimo da je

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right),$$

te na sličan način u drugom potezu,

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.$$

Ovaj uzorak potiče nas da provjerimo što se događa sa zbrojem brojeva na ploči. Vrijedi

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{4}y\right) + \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}y\right) &= x + y \\ \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) &= x + y \\ y + x &= x + y\end{aligned}$$

pa se **zbroj brojeva na ploči ne mijenja** – to je tražena invarijanta. Preostaje provjeriti rješava li ova invarijanta zadatak tako da usporedimo početni i završni zbroj brojeva na ploči.

Kako je na početku zbroj brojeva na ploči $2+3=5$, a na kraju $\frac{5}{6} + \frac{11}{8} = \frac{53}{24} \neq 5$, zaključujemo da

Marin nikada neće doći do brojeva $\left(\frac{5}{6}, \frac{11}{8}\right)$.

Primjer 1.2. Matko i Fabijan igraju igru. Fabijan na ploču napiše neki broj pluseva (+) i neki broj minusa (−). Matko zatim radi sljedeći potez: bira bilo koja dva znaka, obriše ih i umjesto njih napiše plus ako su obrisani znakovi bili isti ili minus ako su bili različiti. To ponavlja dok ne ostane samo jedan znak. Fabijan pobjeđuje ako je to plus, a u suprotnom pobjeđuje Matko. Tko pobjeđuje ako je napisano 100 pluseva i 100 minusa?

Prvo rješenje. U ovom ćemo primjeru promatrati sve moguće poteze koje Matko može napraviti. Postoje samo tri mogućnosti:

$$\begin{aligned}\{+, +\} &\rightarrow + \\ \{-, -\} &\rightarrow + \\ \{+, -\} &\rightarrow -.\end{aligned}$$

Ove transformacije asociraju nas na promjenu predznaka kod množenja: umnožak dvaju brojeva istog predznaka ima pozitivan predznak, dok umnožak dvaju brojeva različitih predznaka ima negativan predznak. Zato je dobra ideja zamijeniti simbole brojevima kako bismo mogli “namjestiti” invarijantu s umnoškom.

Napravimo li zamjenu $+ \rightarrow 1$ i $- \rightarrow -1$, Matkovi potezi postaju:

$$\begin{aligned}\{1, 1\} &\rightarrow 1 \\ \{-1, -1\} &\rightarrow 1 \\ \{1, -1\} &\rightarrow -1\end{aligned}$$

i sada primjećujemo da je **umnožak brojeva** na ploči invarijanta.

Neka je a broj koji ostaje na kraju igre. Umnožak brojeva na početku igre je $1^{100} \cdot (-1)^{100}$, a na kraju a pa je

$$a = 1^{100} \cdot (-1)^{100} = 1,$$

što znači da je posljednji znak na ploči plus i Fabijan pobjeđuje.

Drugo rješenje. Ovu invarijantu mogli smo i drukčije formulirati.

Promatrajmo kako se broj simbola pojedine vrste na ploči mijenja pri potezu. Primijetimo da se broj minusa na ploči nakon svakog Matkova poteza mijenja za paran broj:

$$\begin{aligned}\{+, +\} &\rightarrow + \text{ ne utječe na broj minusa} \\ \{-, -\} &\rightarrow + \text{ smanjuje broj minusa za 2} \\ \{+, -\} &\rightarrow - \text{ ne utječe na broj minusa.}\end{aligned}$$

Iz ovog zaključujemo da je **parnost broja minusa na ploči** invarijanta. Kako je na početku paran broj minusa, na kraju igre će isto biti paran broj minusa. Na kraju igre je na ploči samo jedan znak, pa taj znak mora biti plus i Fabijan pobjeđuje.

Primjer 1.3. U krugu piše **2020** nula i **2** jedinice. Jana u svakom potezu bira tri uzastopna broja i dodaje svakom **1**. Može li postići da na kraju svi brojevi budu jednaki?

Rješenje. Pretpostavimo da Jana može postići da svi brojevi budu jednaki nekom broju k nakon određenog broja poteza. Kako se svakim potezom mijenja zbroj brojeva u krugu, promotrimo što se događa sa zbrojem kroz vrijeme.

1. potez: zbroj brojeva u krugu na početku je $2 \cdot 1 + 2020 \cdot 0 = 2$, nakon dodavanja je $2 + 3 \cdot 1 = 5$.
2. potez: zbroj brojeva nakon dodavanja je $5 + 3 = 8$.
3. potez: zbroj brojeva nakon dodavanja je $8 + 3 = 11$.
- ...

n -ti potez: zbroj brojeva nakon dodavanja je $2 + 3n$.

Sada možemo naslutiti da je invarijanta u ovom procesu **ostatak koji zbroj brojeva u krugu daje pri dijeljenju s 3**. Nakon svakog poteza zbroj svih brojeva daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3, tj. zbroj je kongruentan 2 modulo 3.

U završnom stanju gdje su svi brojevi jednaki k , zbroj bi bio $(2020 + 2)k = 2022k$, što je djeljivo s 3 jer je 2022 djeljiv s 3, pa zaključujemo da Jana ne može postići da svi brojevi u krugu budu jednaki.

Zadaci za vježbu

1. Na školskoj ploči je napisano **5** brojeva. U svakom koraku radimo sljedeću transforma-

ciju: odabiremo bilo koja tri broja x, y i z i mijenjamo ih u $2x - y, 2y - z$ i $2z - x$. Ako su na početku bili napisani brojevi **7, 10, 12, 15, 17**, možemo li uzastopnim ponavljanjem tog postupka doći do petorke brojeva

a) **9, 11, 13, 14, 16**,

b) **6, 8, 10, 18, 19**?

Rješenje: Ne možemo. Invarijanta u a) dijelu je zbroj brojeva na ploči, a u b) broj parnih brojeva na ploči.

2. U škrinjici je bilo **111** zlatnika. Nakon toga je svake noći Crnobradi iz škrinje uzeo **10** zlatnika, a Modrobradi je u nju stavio **15** zlatnika. Može li nakon nekog broja noći u škrinjici biti točno **2014** zlatnika? Obrazložite!

Školsko natjecanje 2014., 1. raz., B varijanta

3. Ukруг je napisano **299** nula i jedna jedinica. Dozvoljeni su sljedeći potezi:

- od svakog broja istovremeno oduzeti oba njemu susjedna broja
- odabrati dva broja između kojih se nalaze točno dva broja te ih oba uvećati ili oba umanjiti za 1.

Može li se konačnim nizom dozvoljenih poteza postići da ukруг budu napisane

a) dvije uzastopne jedinice i **298** nula

b) tri uzastopne jedinice i **297** nula?

Državno natjecanje 2019., 2. raz., A varijanta

4. Brojevi **1, 0, 1, 0, 0, 0** su napisani redom u šest polja koja čine krug. Jedina dozvoljena operacija je povećanje neka dva susjedna broja za 1. Možemo li ponavljanjem te operacije postići da svi brojevi budu jednaki?

Rješenje: Ne možemo. Invarijanta je alternirajući zbroj brojeva u krugu,

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6.$$

5. Na ploči se nalazi prvih n prirodnih brojeva ($n \geq 3$). Ante ponavlja sljedeći postupak: najprije po volji bira dva broja na ploči, a zatim ih povećava za isti proizvoljni iznos.

Odredi sve prirodne brojeve n za koje Ante, ponavljanjem tog postupka, može postići da svi brojevi na ploči budu jednaki.

Državno natjecanje 2015., 1. raz., A varijanta

6. Na ploči su zapisani neki cijeli brojevi. U svakom koraku odabiremo brojeve a i b koji se nalaze na ploči, obrišemo ih i umjesto njih zapišemo brojeve $3a - b$ i $13a - 3b$.

Ako su u početku na ploči brojevi $1, 2, 3, 4, \dots, 2011, 2012$, mogu li se nakon konačnog broja koraka na ploči nalaziti brojevi $2, 4, 6, 8, \dots, 4022, 4024$?

Državno natjecanje 2012., 3. raz., A varijanta

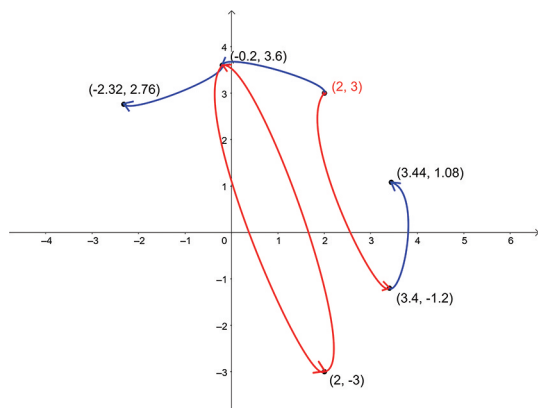
Invarijante: posebna svojstva

U zadatku se umjesto brojeva mogu nalaziti drugi objekti: ploče, točke u ravnini itd. Tada je invarijanta koju tražimo najčešće povezana s nekim svojstvom tog objekta.

Pristup takvim zadacima je najčešće sljedeći: prisjetimo se glavnih svojstava ili vrijednosti koje povezujemo s objektom u zadatku, promatramo kako dozvoljeni potezi utječu na prethodno spomenuta svojstva. Ako primijetimo da neka vrijednost ostaje ista, isprobamo ju kao invarijantu.

Primjer 2.1. Žaba stoji u točki $(2, 3)$ koordinatnog sustava. U svakom potezu može skočiti s trenutne točke (x, y) na točke $(0.8x - 0.6y, 0.6x + 0.8y)$ ili $(0.8x + 0.6y, 0.6x - 0.8y)$. Može li žaba nekim nizom poteza doći do točke $(4, 1)$?

Rješenje. Točke u koordinatnom sustavu možemo prikazati grafički. Korisno je prvo isprobati nekoliko poteza i vidjeti primjećujemo li neki uzorak.



Kroz par primjera vidimo da se jedna ključna vrijednost vezana za točku u koordinatnom sustavu ne mijenja – **udaljenost od ishodišta**. Provjerimo vrijedi li to uvijek.

Udaljenost točke (x, y) od ishodišta je $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Udaljenost točke $(0.8x - 0.6y, 0.6x + 0.8y)$ od ishodišta je

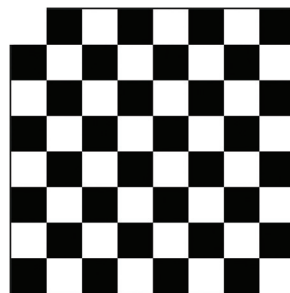
$$\begin{aligned} & \sqrt{(0.8x - 0.6y)^2 + (0.6x + 0.8y)^2} \\ &= \sqrt{(0.64 + 0.36)x^2 + (0.36 + 0.64)y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

a udaljenost točke $(0.8x + 0.6y, 0.6x - 0.8y)$ od ishodišta je

$$\begin{aligned} & \sqrt{(0.8x + 0.6y)^2 + (0.6x - 0.8y)^2} \\ &= \sqrt{(0.64 + 0.36)x^2 + (0.36 + 0.64)y^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Sada smo dokazali da je udaljenost točke od ishodišta zaista invarijanta pri kretanju žabe. Kako je početna točka $(2, 3)$ udaljena od ishodišta za $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, a točka $(4, 1)$ za $\sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$, zaključujemo da žaba ne može doći do točke $(4, 1)$.

Primjer 2.2. Zadana je "krnja" šahovska ploča kojoj je uklonjeno gornje lijevo i donje desno polje, kao na slici.



Je li moguće popločati ovu ploču s ukupno 31 pločicom dimenzija 2×1 i 1×2 ? Pločice nije dozvoljeno preklapati ni rotirati.

Rješenje. Iskoristit ćemo činjenicu da su na šahovskoj ploči polja obojena crnom i bijelom bojom.

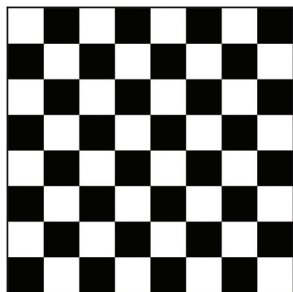
Proces koji promatramo u ovom zadatku jest postavljanje pločice. Na ploču, koja je na početku prazna, postavljat ćemo jednu po jednu pločicu dovoljenog oblika, bez preklapanja i rotiranja.

Obje vrste pločica pokrivaju dva susjedna polja koja su uvijek različitih boja. To znači da sa svakom pločicom koju dodamo prekrivamo jednak broj crnih i bijelih polja. Možemo reći da je invarijanta **razlika broja pokrivenih crnih i pokrivenih bijelih polja**.

Kako je ova ploča nastala iz standardne šahovske, oba uklonjena polja su iste (bije)le boje pa je u završnom stanju razlika broja pokrivenih crnih i pokrivenih bijelih polja jednaka $32 - 30 = 2$. Međutim, u početnom stanju je ta razlika jednaka 0 (jer nijedno polje nije popločano) pa zaključujemo da ovo popločavanje nije moguće.

Zadaci za vježbu

1. Ploča 8×8 na početku je obojena u dvije boje, crnu i bijelu, tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različitih boja, kao standardna šahovska ploča na slici.



U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od osam polja u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu ili obratno. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?

Županijsko natjecanje 2014., 1. raz., A varijanta

2. Ivo pred sobom ima papirnati jednakostranični trokut, škare i ljepljivo. Dopusštena mu je sljedeća operacija: može jednim ravnim potezom odrezati dio mnogokuta koji ima u tom trenutku, zatim zrcaliti taj dio i zalijepiti ga nazad po istoj stranici po kojoj ga je i odrezao. Može li Ivo na kraju dobiti kvadrat?

Rješenje: Ne može. Invarijante u ovom procesu su opseg i površina lika.

3. Skačak se nalazi na gornjem lijevom kutu ploče dimenzije $m \times n$, gdje su m i n neparni brojevi. Dokaži da, ukoliko skače po šahovskim pravilima, ne može obići svako polje na ploči točno jednom i vratiti se na početno polje.

Rješenje: Ako je ploča šahovski obojena, svakim potezom mijenja se boja polja na kojem se skačak nalazi. Zato je invarijanta boja polja na kojem se skačak nalazi u parnom, odnosno neparnom potezu.

4. Pred Vlatkom je standardna 8×8 šahovska ploča. U svakom potezu Vlatka smije promijeniti boju polja unutar nekog 2×2 kvadrata na ploči. Može li ponavljanjem tog poteza postići da na ploči bude samo jedno crno polje?

Rješenje: Ne može. Invarijanta je razlika broja crnih i bijelih polja modulo 4.

5. Branko ispisuje niz kvadratnih polinoma s realnim koeficijentima. U svakom koraku nakon prethodno napisanog polinoma $ax^2 + bx + c$ zapisuje polinom $cx^2 + bx + a$ ili polinom $a(x + d)^2 + b(x + d) + c$ za neki realni broj d . Ako započne s polinomom $x^2 - 2x - 1$, može li Branko opisanim postupkom nakon određenog broja koraka dobiti polinom:

a) $2x^2 - 1$

b) $2x^2 - x - 1$?

Državno natjecanje 2018., 2. raz., A varijanta

LITERATURA

- 1/ *Zadaci s natjecanja iz matematike*, <http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike>
- 2/ *Predavanja udruge Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"*, <https://mm.hr/online-predavanja>
- 3/ A. Engel (1998.): *Problem Solving Strategies*, Springer