

Kreativno mišljenje

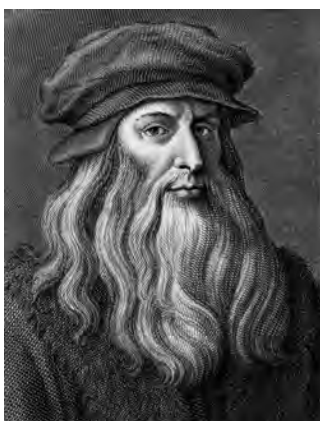
u učenju matematike – važnost problema s višestrukim postupcima rješavanja i s više točnih rješenja

Josip Sliško, Meksiko

Uvod

Prije 570 godina, 15. travnja rođen je Leonardo da Vinci. Po mišljenju mnogih on je jedan od najproduktivnijih i najkreativnijih umjetnika, znanstvenika, inženjera i inovatora svih vremena. Njegove zapanjujuće kreativne sposobnosti i danas su zanimljive, bilo da su tema dokumentarnih istraživanja (Magnan, 2020.), bilo da se svode na "sedam koraka" koje trebaju slijediti oni koji gaje iluzije da mogu razmišljati poput njega (Gelb, 2009.).

U čast Leonarda da Vincija, kao zaslužen priznanje za njegov rad, svakog 15. travnja počinje *Tjedan kreativnosti i inovativnosti*. Tjedan završava 21. travnja koji je Opća skupština Ujedinjenih naroda proglasila *Svjetskim danom kreativnosti i inovativnosti*. U



Slika 1. Leonardo da Vinci (1452. – 1519.)



svijetu koji karakteriziraju brze, velike i dalekosežne promjene u svim sferama života, samo kreativne ideje i njihove uspješne inovacijske primjene mogu omogućiti osobni, ekonomski i socijalni napredak.

Uvažavajući veliku važnost formulacija, provjere i primjene originalnih pristupa rješavanju svih vrsta problema, ove godine Međunarodni projekt ispitivanja učenika (PISA) po prvi put uz čitalačku, prirodoslovnu i matematičku pismenost, ispituje i *sposobnosti kreativnog mišljenja učenika*.

Prema teorijskoj osnovi PISA istraživanja, kreativno mišljenje je složeni sustav koji čini šest dimenzija:

- (1) osjećanje, suosjećanje, promatranje, opisivanje značajnih iskustava i informacija
- (2) traženje, stvaranje i istraživanje ideja
- (3) uspostavljanje veza integriranjem različitih disciplinarnih perspektiva

- (4) proširivanje i "igranje" s neobičnim, rizičnim ili radikalnim idejama
- (5) zamišljanje, izražavanje, realizacija novog proizvoda (rješenja ili izvedbe)
- (6) ocjenjivanje novih rješenja i/ili njihovih mogućih posljedica.

Kompaktna definicija kreativnog mišljenja je *spособnost produktivnog stvaranja, vrednovanja i poboljšanja ideja, što može rezultirati originalnim i učinkovitim rješenjima, dolaženjem do spoznaja i upečatljivim ekspresijama mašte.*

Jasno je da svi školski predmeti trebaju u manjoj ili većoj mjeri doprinosti razvoju te učeničke kompetencije. U ovom članku razmatra se način koji omogućuje učenicima da se u nastavi matematike prvo upoznaju s idejom "originalnih i učinkovitih rješenja", a zatim da sami osmisle i provjere takve ideje.

Dva ilustrativna primjera originalnih i učinkovitih matematičkih ideja

Zbroj prvih 100 prirodnih brojeva

Svakome je poznato kako je Carl Friedrich Gauss kao dječak originalno i učinkovito riješio problem zbrajanja prvih 100 prirodnih brojeva.

Zadavši malom Gaussu ovaj zadatak, njegov je učitelj imao na umu izvršavanje 99 operacija zbrajanja ($1 + 2 = 3$, $3 + 3 = 6$, $6 + 4 = 10$, ...



Slika 2. Carl Friedrich Gauss (1777. – 1855.)

$4950 + 100 = 5050$). Umjesto da slijedi taj mukotrpan rutinski put, Gauss je uočio da u tom nizu brojeva postoji 50 parova čiji je zbroj **101** ($1 + 100$, $2 + 99 = 101$, ..., $50 + 51 = 100$). Tim se genijalnim kreativnim uvidom traženi zbroj nalazi jednostavnim množenjem:

$$50 \cdot 101 = 5050.$$

Broj mečeva na jednom teniskom turniru

Drugi primjer je manje poznat, ali nije ništa manje ilustrativan:

Za sudjelovanje na jednom amaterskom teniskom turniru prijavila su se 1 024 natjecatelja. Ako se turnir igra "na ispadanje", koliko je mečeva odigrano kako bi se dobio pobjednik?

Uobičajeni način rješavanja ovog aritmetičkog problema jest ovakvo prebrojavanje odigranih mečeva:

- U prvom kolu igra se 512 mečeva. Ispada 512, a turnir nastavlja 512 tenisača.
- U drugom kolu igra se 256 mečeva. Ispada 256, a turnir nastavlja 256 tenisača.
- U trećem kolu igra se 128 mečeva. Ispada 128, a turnir nastavlja 128 tenisača.
- U četvrtom kolu igraju se 64 meča. Ispadaju 64, a turnir nastavljaju 64 tenisača.
- U petom kolu igraju se 32 meča. Ispadaju 32, a turnir nastavljaju 32 tenisača.
- U šestom kolu igra se 16 mečeva. Ispada 16, a turnir nastavlja 16 tenisača.
- U sedmom kolu igra se 8 mečeva. Ispada 8, a turnir nastavlja 8 tenisača.
- U osmom kolu igraju se 4 meča. Ispadaju 4, a turnir nastavljaju 4 tenisača.
- U polufinalu se igraju 2 meča. Ispadaju 2, a turnir nastavljaju 2 tenisača.
- U finalu se igra samo 1 meč i dobiva se pobjednik.

Odgovor se sada dobiva zbrajanjem svih mečeva:

$$1+2+4+8+16+32+64+128+256+512=1\,023.$$

Međutim, puno brži i jednostavniji način razmišljanja je sljedeći: Kako bi se dobio pobjednik turnira, iz igre trebaju ispasti **1 023** tenisača. U jednom meču iz igre ispada jedan igrač. To znači da su na turniru odigrana **1 023** meča.

U oba se prethodna primjera rutinski postupak rješavanja lako zamišlja, ali mu je realizacija dugačka i često podložna greškama. Originalni postupak je iznenađujuće kratak i mogućnost pogreške je minimalna. Međutim, nalaženje takvog postupka je težak pothvat jer zahtijeva napuštanje rutinskog mišljenja te posjedovanje kreativnog uvida u matematičku strukturu problema ili u suštinsku karakteristiku problemske situacije.

Pritom postoji opasnost da učenici pogrešno zaključče kako su samo genijalci sposobni za takvo kreativno rješavanje matematičkih problema. Da bi se to izbjeglo, u nastavi matematike treba povećati broj problema koji se mogu riješiti na više načina ili koji imaju više točnih odgovora, a smanjiti broj problema koji se rješavaju samo na jedan način i to već viđenim ili nametnutim rutinskim ili algoritamskim postupkom.

Opću važnost i potrebu takvog pristupa edukaciji "za rast uma" davno je iskazao Bruner (1965.):

Djeci kao i odraslima treba poticaj da je u redu zabavljati se i izražavati vrlo subjektivne ideje, tretirati zadatak kao problem na koji se samostalno osmišljava odgovor umjesto da ga se pronađe u udžbeniku ili na školskoj ploči.

Mala djeca u školi troše jako puno vremena i truda kako bi shvatila što točno učitelj od njih očekuje i obično dolaze do zaključka kako učitelj od njih očekuje urednost i dobro pamćenje ili da rade stvari u određeno vrijeme na određeni način.

Ako se učenici sustavno potiču da slobodno traže vlastita rješenja problema, aktiviraju se njihovi kreativni potencijali i rezultati učenja su impresivni (Niu i Zhou, 2017.). U takvoj razrednoj kulturi kineski su učenici za jedan problem kretanja dvaju vlakova pronašli čak 15 različitih načina rješavanja.

Problemi s višestrukim postupkom rješavanja ili s više rješenja: Rezultati istraživanja

Istraživanje matematičkog mišljenja učenika u rješavanju nestandardnih problema otkriva da su učenici u stanju predložiti i očekivane, ali i neočekivane načine nalaženja istog rješenja.

Tako je bilo primjerice u slučaju problema koji je istražio Kalman s učenicima četvrtih i petih razreda (2003.):

Nadi zbroj prvih dvadeset neparnih brojeva.

Amanda, učenica petog razreda, zaključila je da rješenje problema iznosi **400**. Ona je poput Gaussa uočila da u tom nizu postoji deset parova brojeva čiji zbroj je **40**: $1 + 39 = 40$, $3 + 37 = 40$, ..., $19 + 21 = 40$.

Alex je uvidio sljedeću pravilnost: zbroj jednoznamenkastih brojeva (1, 3, 5, 7 i 9) je 25. Oni se pojavljuju još tri puta i to među neparnim brojevima od 11 do 19 (uz peterostruko ponavljanje broja 10), među neparnim brojevima od 21 do 29 (uz peterostruko ponavljanje broja 20) i među neparnim brojevima od 31 do 39 (uz peterostruko ponavljanje broja 30). Zbog toga je ukupan zbroj:

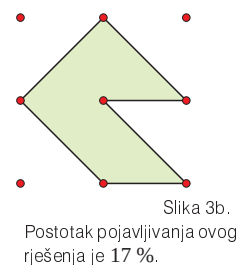
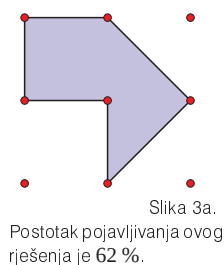
$$(4 \cdot 25) + (5 \cdot 10) + (5 \cdot 20) + (5 \cdot 30) \\ = 100 + 50 + 100 + 150 = 400.$$

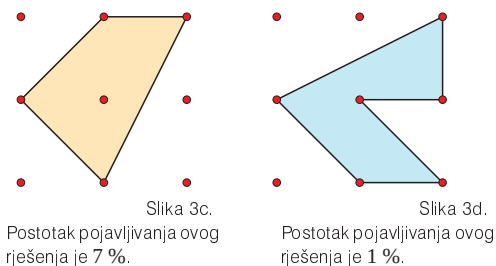
Kada je u istraživanje rješavanja problema uključen veći broj učenika, moguće je doći do vjerodostojnih postotaka prisutnosti pojedinih postupaka rješavanja. Haylock (1997.) je tražio takve postotke za sljedeći problem:

Spajanjem točaka u mreži od 9 točaka, gdje je udaljenost najbližih točaka 1 cm, kreirajte lik čija je površina 2 cm². (Površina mrežnog kvadrata je 4 cm².)

98 % učenika od 11 do 12 godina izabralo je najjednostavnije rješenje: kreirali su pravokutnik čije su stranice duljina 2 cm i 1 cm, podijelivši mrežni kvadrat na dva jednaka dijela.

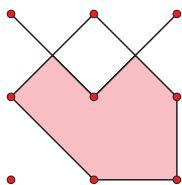
Preostali učenici (2 %) pokazali su daleko više kreativnosti kreirajući geometrijske likove različitih oblika (slika 3).





Najjednostavniji lik, po broju stranica, bio je četverokut (slika 3c), dok su ostala rješenja bili maštoviti mnogokuti.

Najkreativnije rješenje našao je samo jedan učenik kreiravši sedmerokut (slika 4).



Slika 4. Najkreativnije rješenje u obliku sedmerokuta

Problemi s višestrukim postupkom rješavanja često se upotrebljavaju i za dizajniranje instrumenata koji su korisni u istraživanju kvalitete matematičkih znanja i u mjerenju matematičke kreativnosti. Takav pristup proveden je primjerice u slučaju geometrije (Levav-Waynberg i Leikin, 2012a). Kvaliteta geometrijskog znanja ocijenjena je na osnovi korektnosti i povezanosti različitih rješenja. Kreativnost je mjerena uzimajući u obzir točnost, fleksibilnost i originalnost rješenja. Korišteni instrument omogućavao je nalaženje međusobne ovisnosti između komponenata geometrijskog znanja i kreativnosti.

Problemi s višestrukim rješenjima imaju važnu ulogu i u intervencijskim pedagoškim istraživanjima. Grupe studenata koji su bili izloženi problemima s višestrukim rješenjima pokazale su veći napredak u geometrijskim znanjima i kreativnosti nego grupe studenata koje su se susretale s problemima u kojima je traženo samo jedno rješenje (Levav-Waynberg i Leikin, 2012.b).

Slični rezultati postižu se i u intervencijskim istraživanjima koja se u eksperimentalnoj grupi sustavno bave "otvorenim problemima" s više točnih odgovora. Takvi problemi potiču divergentno mišljenje koje je važna komponenta kreativnosti (Kwon, Park i Park, 2006.).

Jedan primjer jednostavnog "otvorenog problema" iz aritmetike glasi:

Među brojevima 1, 2, 4, 6, 8 i 12 izaberi broj koji je drukčiji od ostalih. Pokušaj naći što više mogućih odgovora.

Neki mogući točni odgovori učenika su:

- 1: To je jedini neparni broj. Svi ostali su parni brojevi.
- 12: To je jedini dvoznamenkasti broj. Svi ostali su jednoznamenkasti brojevi.
- 8: To je jedini broj koji nije djeljitelj broja 12. Svi ostali brojevi su njegovi djeljitelji.
- 2: To je jedini prost broj. Svi ostali brojevi su složeni, a 1 nije ni prost ni složen.

"Otvoreni problem" i problem s višestrukim postupkom rješavanja u udžbenicima matematike

Poznato je da udžbenici matematike značajno utječu ne samo na to kako nastavnici planiraju i izvođe nastavu (Reys i Bay-Williams, 2003.; Glasnović Gracin i Domović, 2009.) nego i na to koja matematička znanja učenici mogu ili ne mogu naučiti (Jukić Matić i Glasnović Gracin, 2020.). Ako školska matematika treba s ostalim predmetima doprinositi sposobnostima učenika da traže i nađu originalna i učinkovita rješenja, važno je istražiti i jasno utvrditi kakvi se matematički zadatci i aktivnosti pojavljuju u udžbenicima.

Jedno je nizozemsko istraživanje, provedeno na sadržajima četiriju najpopularnijih udžbenika za četvrti razred koji se koriste u 85 % škola, ukazalo na zabrinjavajući nedostatak nerutinskih problema. Naime, takvi su problemi nesumnjivo prvi značajan korak k poticanju kreativnog mišljenja jer nisu rješivi mehaničkom primjenom algoritamskih postupaka (Kolovou, van den Heuvel-Panhuizen i Bakker, 2009.).

Da bi olakšali analizu, autori su definirali i dali paradigmatke primjere za tri tipa zadataka koji se

bitno razlikuju po kognitivnoj zahtjevnosti i ilustriraju razliku između jednostavnih zadataka, zadataka u “sivim zonama” i zadataka koji su slični zagonetkama:

1. *Imaš šalicu za juhu (300 ml). Kako s pomoću nje izmjeriti 2 100 ml vode?*

2. *Imaš šalicu za juhu (300 ml), šalicu za čaj (200 ml) i čašu (250 ml). Pokaži različite načine kojima se može izmjeriti 1 500 ml vode.*

3. *Imaš vrč od 5 litara i vrč od 3 litre. Kako možeš izvaditi 4 litre vode iz velike zdjele s pomoću ta dva vrča? Vodu smiješ ulijevati natrag u posudu.*

Prvi zadatak zahtijeva jednostavnu primjenu algoritma dijeljenja kako bi se utvrdilo da 7 šalica čini 2 100 ml.

Drugi zadatak nudi više mogućih rješenja do kojih se dolazi raznim kombinacijama zapremnina posuda čiji zbroj daje potrebnu količinu: 5 šalica za juhu (300 ml), 6 čaša (250 ml), 6 šalica za čaj (200 ml) i jedna šalicu za juhu (300 ml), četiri čaše (250 ml), jedna šalicu za juhu (300 ml) i jedna šalicu za čaj (200 ml)...

Treći zadatak prava je zagonetka jer rješenje nije jednostavno. Zahtijeva izgradnju mentalnog modela situacije u kojoj se mora pronaći niz koraka za odvajanje količine od 4 litre vode.

U seriji udžbenika s najvećim korištenjem “zagonetnih zadataka”, postotak tih zadataka bio je tek nešto više od 2 %. Kad su im se dodali zadatci iz “sive zone”, najveći pronađeni postotak bio je tek 13 %. Po mišljenju autora nezadovoljavajući rezultati nizozemskih učenika u rješavanju nerutinskih problema izravna su posljedica nedovoljnog prisustva takvih zadataka u matematičkim udžbenicima.

U svojoj analizi na uzorku od 22 000 matematičkih zadataka i aktivnosti učenja u najviše korištenim hrvatskim udžbenicima matematike za šesti, sedmi i osmi razred, Glasnović Gracin (2018.) je ustanovila da analizirani udžbenici ne nude poželjan puni spektar problema i aktivnosti. Prenaglašeno je prisustvo računskih operacija koje vode do samo jednog “zatvorenog” rezultata. U svim domenama matematike je više od 97 % analiziranih zadataka i

aktivnosti tog tipa. Nužna je posljedica da je prisustvo zahtjevnijih kognitivnih aktivnosti (argumentacija i interpretacija, refleksivno mišljenje i rješavanja “otvorenih problema” s više mogućih rješenja) – minimalno. Savršeno je jasno da spomenuti dominantni udžbenički sadržaji ne potiču učeničko kreativno mišljenje.

Slični nezadovoljavajući rezultati dobiveni su i u nedavnim istraživanjima provednim na turskim matematičkim udžbenicima. Ista je situacija u slučaju poticanja divergetnog i konvergetnog mišljenja (Bingölbali, Bingölbali, 2020.), ali i u domeni korištenja zadataka s višestrukim postupkom rješavanja i zadataka koji imaju nekoliko točnih rješenja (Bingölbali, 2020.). Ovaj je drugi tip problema prisutan tek u 8 % pitanja i zadataka.

Iluzorno je očekivati dobre rezultate učenja u domeni kreativnog mišljenja ako se u udžbenicima matematike ne pojavljuje značajan broj problema koji potiču kreativnost u traženju “originalnih i učinkovitih rješenja”.

Primjeri “otvorenih problema” i problema s višestrukim postupcima rješavanja

U nastavku prilažem četiri vlastita “kamenčića” za poželjan i potreban mozaik kolekcije problema za poticanje kreativnog mišljenja u učenju matematike. Komentari u prva dva problema temeljeni su na rezultatima njihove stvarne primjene, dok su prijedlozi dvaju preostalih problema praćeni poznatim povijesnim rješenjima i jednim jednostavnim teorijskim predviđanjem.

Podjela broja 10 na tri nejednaka dijela

Kao dobar primjer “otvorenog problema” može poslužiti problem dijeljenja broja 10 na tri nejednaka dijela koji je formulirao Fibonacci u svojoj knjizi *Liber abaci* (Sigler, 2003., str. 278.):

Podijeli broj 10 na tri nejednaka dijela koji su takvi da je umnožak najmanjeg s najvećim jednak umnošku preostalog sa samim sobom.

Ne spominjući da je problem nedovoljno određen i da ima beskonačno mnogo rješenja, Fibonacci ga je riješio postupkom "lažne pretpostavke". Pretpostavio je da su traženi dijelovi 1, 2 i 4. Ti dijelovi zadovoljavaju drugi uvjet ($1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$), ali ne zadovoljavaju prvi uvjet ($1 + 2 + 4 = 7$). Da bi se zadovoljio i taj uvjet, svaki od tih brojeva treba pomnožiti s $\frac{10}{7}$. Na taj način, Fibonacci je našao jedno

od mogućih rješenja: $\frac{10}{7}$, $\frac{20}{7}$ i $\frac{40}{7}$.

Istim postupkom mogao je naći i niz drugih mogućih rješenja. Kao primjeri slijede dva dodatna rješenja:

Pretpostavka da su traženi brojevi 1, 3 i 9, daje rješenja $\frac{10}{13}$, $\frac{30}{13}$ i $\frac{90}{13}$. Pretpostavka da su traženi brojevi 1, 4 i 16, vodi do rješenja $\frac{10}{21}$, $\frac{40}{21}$ i $\frac{160}{21}$.

Moji studenti nisu bili u stanju reproducirati Fibonaccijevo rješenje. Tek se jedan student "poigrao" s brojevima 1, 3 i 9, ali nije uspio pronaći način kojim bi njihov zbroj bio 10.

Međutim, studenti su lako došli do zaključka da nije moguće jednoznačno naći tri broja ako su poznaju samo dvije međusobne relacije:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 10 \\xz &= y^2.\end{aligned}$$

Zbog toga su neki od studenata našli jedno od mogućih rješenja, pretpostavljajući da je $x = 1$. Na taj način dobivali su rješiv sustav dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama:

$$\begin{aligned}y + z &= 9 \\z &= y^2.\end{aligned}$$

Vrijednost za y pronalazili su iz kvadratne jednadžbe:

$$y^2 + y - 9 = 0.$$

Pozitivno rješenje za y je:

$$y = \frac{\sqrt{37} - 1}{2}.$$

Iz jednadžbe $z = y^2$ su našli:

$$z = \frac{38 - 2\sqrt{37}}{4}.$$

Drugi studenti pretpostavili su da je $y = 1$, pa su dobili sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}x + z &= 9 \\xz &= 1.\end{aligned}$$

Rješenja su:

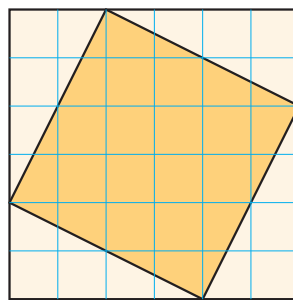
$$z = \frac{9 + \sqrt{77}}{2}, \quad x = \frac{2}{9 + \sqrt{77}}.$$

Slijedeće aktivnosti poslužile su kako bih svojim studentima pokazao Fibonaccijevo rješenje s ciljem upoznavanja važnih aspekata evolucije matematičkog znanja i procedura za rješavanje jednog te istog problema.

Površina "nagnutog kvadrata"

Ovim problemom je prije nekoliko godina započelo moje istraživanje mogućnosti poticanja matematičke kreativnosti na kolegiju "Razvoj sposobnosti kompleksnog mišljenja". Problem je bio formuliran s jasnom naznakom da se do rješenja može doći različitim postupcima:

U kvadrat čija je stranica duljine 6 cm upisan je "nagnuti kvadrat" (slika 5). Na dva različita načina nađi površinu "nagnutog kvadrata".



Slika 5. Kvadrat sa stranicom duljine 6 cm i "nagnuti kvadrat"

Očekivao sam da će se većina studenata koristiti dvama postupcima rješavanja:

Primjena Pitagorina poučka: Površina "nagnutog kvadrata" jednaka je kvadratu njegove stranice. Kako je ta stranica hipotenuza pravokutnog trokuta čije su katete 4 cm i 2 cm, primjenom Pitagorina

poučka dobiva se da je tražena površina jednaka $(4\text{ cm})^2 + (2\text{ cm})^2 = 16\text{ cm}^2 + 4\text{ cm}^2 = 20\text{ cm}^2$.

Korištenje površina četiriju pravokutnih trokuta: Veliki kvadrat ima površinu 36 cm^2 . Površina "nagnutog kvadrata" dobiva se tako da se od te površine oduzmu površine četiriju pravokutnih trokuta čije su katete duljine 2 cm i 4 cm . Kako ti trokuti imaju površinu 4 cm^2 , površina "nagnutog kvadrata" je

$$36\text{ cm}^2 - (4 \cdot 4\text{ cm}^2) = 36\text{ cm}^2 - 16\text{ cm}^2 = 20\text{ cm}^2.$$

Moja su se očekivanja ispunila. Međutim, treba napomenuti jedan važan detalj koji pokazuje zabrinjavajuću prisutnost rutinskog mišljenja u studentskom rješavanju problema. Skoro svi studenti najprije su računali duljinu stranice jednaku kvadratnom korijenu iz 20 cm^2 , a onda su dobivenu vrijednost kvadrirali kako bi našli da je površina "nagnutog kvadrata" jednaka 20 cm^2 !

Ugodno me iznenadilo saznanje da su studenti našli i dodatne kreativne postupke rješavanja koje nisam očekivao.

Dijeljenje "nagnutog kvadrata" na manje likove: Uz nekoliko nejasnih ili problematičnih pokušaja, studenti su u samostalnom i grupnom rješavanju pokazali da postoji čak pet uspješnih načina da se "nagnuti kvadrat" podijeli na manje likove. Navodim tri primjera takvih podjela:

- "Nagnuti kvadrat" čine 4 jednaka trokuta čija je baza duljine 5 cm i visina 2 cm . Kako je površina svakog od tih trokuta 5 cm^2 , površina "nagnutog kvadrata" 20 cm^2 .
- "Nagnuti kvadrat" čine kvadrat površine 4 cm^2 i 4 pravokutna trokuta sa katetama duljina 4 cm i 2 cm . Kako je površina svakog od tih trokuta 4 cm^2 , površina "nagnutog kvadrata" je 20 cm^2 .
- "Nagnuti kvadrat" čine pravilan "križ" površine 12 cm^2 i 8 pravokutnih trokuta s katetama duljina 2 cm i 1 cm . Kako je površina svakog od tih trokuta 1 cm^2 , površina "nagnutog kvadrata" je 20 cm^2 .

Muž i žena piju vino

Nizozemski astronom i matematičar Regnier Gemma Frisius (1508. – 1555.) je 1540. godine formuli-
rao sljedeći problem:

Kad muž pije sam, bačva vina mu traje 20 dana. Kada žena pije s njim, bačva vina im traje 12 dana. Kada bi žena pila sama, koliko dana bi joj trajala ta bačva vina?

Gledajući povijesne inačice rješenja ovog i sličnih problema, našao sam da ga je moguće riješiti na šest različitih načina. Zbog toga bi on mogao biti prikladan za poticanje i istraživanje kreativnog matematičkog mišljenja učenika i studenata. Mogući su sljedeći postupci rješavanja:

1. Algebarsko rješenje: Ako je x traženi broj dana, onda vrijedi:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{5-3}{60} = \frac{1}{30}.$$

Bačva vina trajala bi 30 dana.

2. Aritmetičko rješenje: Za jedan dan muž popije dvadesetinu, a sa ženom dvanaestinu bačve vina. Žena za jedan dan popije razliku tih dviju količina. To znači da za jedan dan žena popije

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{5-3}{60} = \frac{1}{30}$$

bačve vina. Da popije cijelu bačvu, treba joj 30 dana.

3. Postupak lažne pretpostavke: Pretpostavimo da muž i žena zajedno piju vino 60 dana. U tom vremenu popili bi 5 bačvi vina. Za 60 dana muž bi sam popio 3 bačve vina. To znači da bi žena sama za 60 dana popila 2 bačve vina. Za popiti jednu bačvu vina trebalo bi joj 30 dana.

4. Pretpostavka o količini vina: Pretpostavimo da bačva sadrži 10 litara vina. Kada piju zajedno, muž i žena za jedan dan popiju $\frac{5}{6}$ litara vina. Kako muž za jedan dan popije pola litre ili $\frac{3}{6}$ litre vina, proizlazi da žena za jedan dan popije $\frac{2}{6}$ litre ili $\frac{1}{3}$ litre. Drugim riječima, ona za 3 dana popije 1 litru vina. Da bi popila 10 litara, treba joj deset puta više dana. Znači da joj treba 30 dana.

5. *Trojno pravilo:* Za 12 dana muž sam popije $\frac{12}{20}$ ili $\frac{3}{5}$ bačve vina. Za 12 dana žena je popila ostatak ili $\frac{2}{5}$ bačve vina. Ako joj za pijenje $\frac{2}{5}$ bačve vina treba 12 dana, onda joj za cijelu bačvu treba $12 \cdot \frac{5}{2}$ dana ili 30 dana.

6. *Uspoređivanje brzine pijenja vina:* Za 12 dana muž sam popije $\frac{3}{5}$ bačve vina, a žena sama $\frac{2}{5}$ bačve vina. To znači da muž pije $\frac{3}{2} = 1.5$ puta brže nego žena. Ako mužu za cijelu bačvu treba 20 dana, onda će ženi (koja pije 1.5 puta sporije), trebati 30 dana ($1.5 \cdot 20$ dana = 30 dana).

Danas učenicima ne bi bilo prikladno dati originalnu formulaciju problema, međutim, za eksperimentalno istraživanje učeničke kreativnosti lako je promijeniti kontekst i zadržati istu matematičku strukturu.

Dvije moguće i uobičajene rekontekstualizacije, s istim spektrom višestrukih postupaka rješenja su sljedeće:

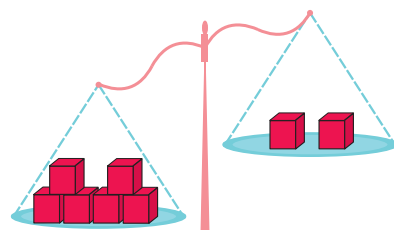
Bazen mogu puniti dvije cijevi A i B. Ako je otvorena samo cijev A, bazen se napuni za 20 minuta. Ako je uz cijev A otvorena i cijev B, bazen se napuni za 12 minuta. Za koliko bi se minuta napunio bazen ako bi bila otvorena samo cijev B?

Mate sam izgradi jedan zid za 20 dana. Ako bi Ivan radio zajedno s Matom, oni bi zajedno taj zid izgradili za 12 dana. Za koliko bi dana Ivan sam izgradio taj zid?

Problem postizanja ravnoteže vage

Ovaj problem predlažem kao moguću izazovnu praktično-kreativnu aktivnost za učenike prvog ili drugog razreda osnovne škole. Čvrsto vjerujem da s korištenjem i poboljšanjem kreativnog učeničkog mišljenja treba početi što je moguće ranije, izborom problema koji dopuštaju nalaženje rješenja na više načina.

Za početak se učenicima pokaže situacija u kojoj vaga nije u ravnoteži (slika 6).



Slika 6. Vaga nije u ravnoteži (zdjelice vage su na različitim visinama)

Učenicima se postavlja pitanje: *Zašto se zdjelice vage ne nalaze na istoj visini?*

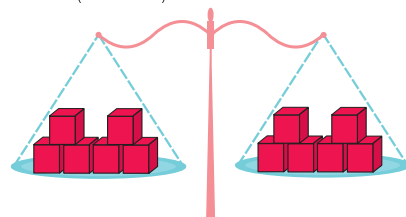
Očekivani točan odgovor učenika glasio bi: Zato što 6 kocaka ima veću masu nego 2 kocke!

Praktično-kreativno mišljenje učenika potiče se pitanjem: *Na koliko bi različitih načina bilo moguće postići da vaga bude u ravnoteži?*

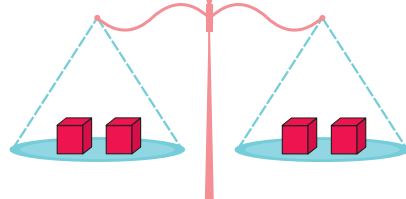
Možemo očekivati da će većina učenika brzo predložiti dva načina za rješavanje problema izjednačavanjem broja kocaka na obje strane.

Jedan je način dodavanje 4 kocke u desnu zdjelicu. Tako će na obje strane biti 6 kocaka (slika 7a).

Drugi je način micanje 4 kocke koje su "višak" u lijevoj zdjelici. Tim će načinom na obje strane vage biti 2 kocke (slika 7b).



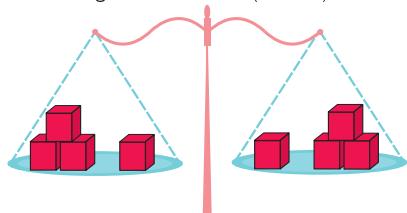
Slika 7a. Ravnoteža vage sa 6 kocaka na obje strane



Slika 7b. Ravnoteža vage s 2 kocke na obje strane

Vjerujem da će za učenike biti teže smisliti način izjednačavanja broja kocaka koji se temelji na premještanju kocke iz jedne u drugu zdjelicu, bez dodavanja novih ili potpunog micanja već postojećih

kocki. Treći je način, dakle, prebacivanje dviju kocka s lijeve na desnu stranu. Tim će načinom na obje strane vage biti 4 kocke (slika 8).



Slika 8. Ravnoteža vage s 4 kocke na obje strane

Zaključak

Za uspješno poticanje matematičkog kreativnog mišljenja kod učenika i studenata nužno je sustavno zadavati prikladne probleme. Tipovi takvih problema izloženi su i komentirani u ovom članku.

Pored toga, važno je graditi razrednu kulturu u kojoj su greške, do kojih često dolazi u traženju no-

vih postupaka rješavanja izazovnih (ali i "rutinskih") problema, vrijedna prilika za učenje.

Ako je eksperimentalna činjenica da se u udžbenicima ne pojavljuju matematički problemi koji potiču kreativno mišljenje, hitno su potrebne pojedinačne i kolektivne akcije nastavnika i pedagoških časopisa s ciljem stvaranja što bogatije kolekcije problema koji omogućuju višestruke postupke rješavanja ili imaju više različitih točnih rješenja.

Nastavnici koji imaju primjere takvih problema mogu iskustva primjene i ueničke rezultate podijeliti s kolegama izlažući na webinarima ili na stručnim skupovima. Pedagoški časopisi mogli bi uvesti posebnu stalnu rubriku s istom svrhom. U rubrici bi bili dobrodošli i prijedlozi zadataka tog tipa koji još nisu doživjeli svoje razredne implementacije kojima se dolazi do autentičnih ueničkih rješenja. Neka od tih rješenja su često neočekivana za istraživače i predstavljaju prave bisere ueničkog kreativnog mišljenja.

LITERATURA

- 1/ E. Bingölbali, F. Bingölbali (2020.): Divergent Thinking and Convergent Thinking: Are They Promoted in Mathematics Textbooks?, *International Journal of Contemporary Educational Research*, 7(1), 240–252.
- 2/ E. Bingölbali (2020.): An analysis of questions with multiple solution methods and multiple outcomes in mathematics textbooks, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(5), 669–687.
- 3/ J. S. Bruner (1965.): The growth of mind, *American Psychologist*, 20(12), 1007–1017.
- 4/ M. J. Gelb (2009.): *How to think like Leonardo da Vinci: Seven steps to genius every day*, Dell.
- 5/ D. Glasnović Gracin, V. Domović (2009.): Upotreba matematičkih udžbenika u nastavi viših razreda osnovne škole, *Odgojne znanosti*, 11(2 (18)), 45–65.
- 6/ D. Glasnović Gracin (2018.): Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1003–1024.
- 7/ D. Haylock (1997.): Recognising mathematical creativity in school children, *ZDM*, 29(3), 68–74.
- 8/ R. Kalman (2003.): Revisiting sum of odd natural numbers, *Teaching Mathematics in the Middle School*, 9(1), 58–61.
- 9/ A. Kolovou, M. van den Heuvel-Panhuizen, A. Bakker (2009.): Non-routine problem solving tasks in primary school mathematics textbooks: A needle in a haystack, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 8, 29–66.
- 10/ O. N. Kwon, J. H. Park, J. S. Park (2006.): Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach, *Asia Pacific Education Review*, 7(1), 51–61.
- 11/ A. Levav-Waynberg, R. Leikin (2012a): Using multiple solution tasks for the evaluation of students' problem-solving performance in geometry, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 12(4), 311–333.
- 12/ A. Levav-Waynberg, R. Leikin (2012b): The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry, *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 73–90.
- 13/ L. Jukić Matić, D. Glasnović Gracin (2020.): Matematički udžbenik u rukama učenika viših razreda osnovne škole: kako, kada i zašto ga koriste, *Croatian Journal of Education: Hrvatski časopis za odgoj i obrazovanje*, 22(1), 9–40.
- 14/ R. A. Magnan (2020.): *The Unknown Genius Creative Abilities of Leonardo Da Vinci: Documenting Leonardo Da Vinci's Superior Cognitive Functioning*, Xlibris Corporation.
- 15/ W. Niu, Z. Zhou (2017.): Creativity in mathematics teaching: A Chinese perspective (an update). In R. A. Beghetto and J. C. Kaufman (Eds.), *Nurturing creativity in the classroom*, Second edition, Cambridge University Press.
- 16/ B. J. Reys, J. M. Bay-Williams (2003.): Spotlight on the principles: The role of textbooks in implementing the curriculum principle and the learning principle. *Mathematics teaching in the middle school*, 9(2), 120–124.
- 17/ L. Sigler (2003.): *Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's book of calculation*, Springer Science and Business Media.