

Konstrukcije tangente na kružnicu

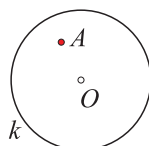


Alija Muminagić, Danska
Sanja Varošaneć, Zagreb

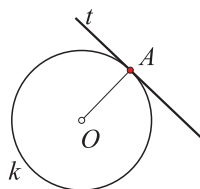
Prema predmetnom kurikulumu matematike [2] pojmovi vezani za kružnicu obrađuju se u gotovo svakom razredu. Među ostalim, u drugom se razredu gimnazija i strukovnih škola uz obradu poučka o obodnom i središnjem kutu prirodno veže konstrukcija tangente na kružnicu, [3]. U ovom ćemo članku proširiti znanje o tangentama opisujući nekoliko načina konstruiranja tangenata na kružnicu.

U cijelom članku kružnica k na koju tražimo tangente ima središte u točki O i polumjer duljine r , tj. radi se o kružnici $k(O, r)$, a točku kroz koju prolazi tangenta nazivamo A .

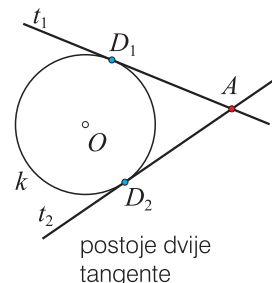
Očito je da postoje tri položaja točke A u odnosu na kružnicu k : A se nalazi u nutrini kruga $K(O, r)$ određenog kružnicom k , A se nalazi na kružnici k te A se nalazi u vanjštini kruga $K(O, r)$. U prvom slučaju ne postoji



tangenta
ne postoji



$A \in k$, tangenta
je jedinstvena



postoje dvije
tangente

Slika 1.

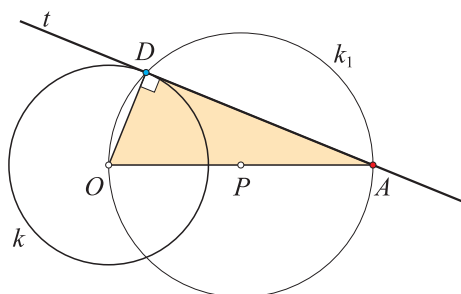
Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska
prof. dr. sc. Sanja Varošaneć, Matematički odsjek Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, sanja.varosanec@math.hr

Prva metoda

Opišimo prvo metodu koja je većini nastavnika dobro poznata, a temelji se na Talesovu poučku o obodnom kutu nad promjerom kružnice i njegovu obratu. Postupit ćemo kao i uvijek pri rješavanju konstruktivnog zadatka: prvo ćemo analizirati zadatak, a zatim opisati konstrukciju. Dokaz konstrukcije slijedit će iz provedene analize, a rasprava se zadatka svodi na jednu rečenicu: *Zadatak ima dva rješenja.*

Analiza:

Analizu započinjemo skicom problema u kojoj su nacrtani i poznati i nepoznati objekti, a tražimo vezu između njih na temelju koje ćemo provesti konstrukciju.



Slika 2.

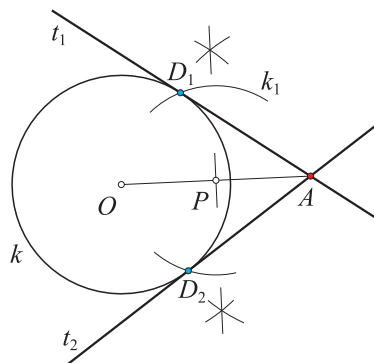
Na skici su nacrtani kružnica $k(O, r)$, točka A izvan nje te tangenta t na kružnicu kroz točku A čije je diralište točka D . Budući da je tangenta okomita na polumjer $\overline{OD}$, uočava se pravokutan trokut OAD s pravim kutom pri vrhu D . Prema obratu Talesova poučka o obodnom kutu nad promjerom kružnice, pravi je kut $\angle ODA$ ujedno obodni kut kružnice s promjerom $\overline{OA}$. Drugim riječima, središte kružnice opisane trokutu OAD je polovište hipotenuze $\overline{OA}$. Ovime je analiza gotova jer smo odredili gdje je središte druge kružnice na kojoj se nalazi diralište, pa ćemo presjekom te nove kružnice i zadane kružnice dobiti dirališta tangenti.

Konstrukcija:

1. kružnica k , točka A
2. P je polovište dužine $\overline{OA}$
3. $k_1(P, |OP|)$

$$4. k \cap k_1 = \{D_1, D_2\}$$

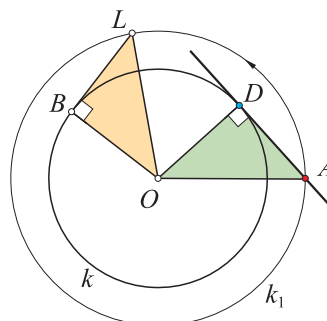
5. pravci AD_1 i AD_2 su tražene tangente.



Slika 3.

Druga metoda

Analiza:



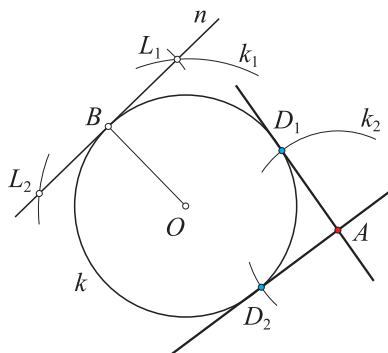
Slika 4.

Kao i prije, na skici su nacrtani kružnica $k(O, r)$, točka A i tangenta AD iz točke A na kružnicu pri čemu je D diralište tangente. Druga tangenta, radi jednostavnosti skice, nije nacrtana. Trokut OAD je pravokutan trokut i ako ga rotiramo oko točke O do nekog drugog položaja, on i dalje ostaje pravokutan trokut. Zato rotirajmo trokut OAD oko točke O tako da točka D dođe u položaj B gdje je B bilo koja točka na kružnici k . Rotirani sukladni trokut nazovimo OLB pri čemu je $|OA| = |OL|$, $|OB| = |OD| = r$, $|BL| = |AD|$. Zbog rotacije točka L nalazi se na kružnici $k_1(O, |OA|)$. Budući da je pravi kut trokuta OLB u vrhu B , slijedi da je pravac BL tangenta na kružnicu k . Iz činjenice da je $|BL| = |AD|$ slijedi da točka D pripada kružnici

$k_2(A, |AD|)$, a znamo da pripada i kružnici k , pa je D u presjeku tih dviju kružnica. Time je analiza gotova jer će tangenta u proizvoljnoj točki $B \in k$ dati polumjer nove kružnice k_2 na kojoj leži diralište D .

Konstrukcija:

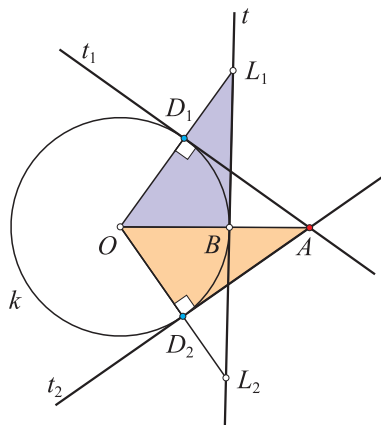
1. kružnica k , točka A
2. B je bilo koja točka na k
3. n je okomica na $\overline{OB}$ u točki B
4. $k_1(O, |OA|)$
5. $n \cap k_1 = \{L_1, L_2\}$
6. $k_2(A, |BL_1|) \cap k = \{D_1, D_2\}$
7. pravci AD_1 i AD_2 su tražene tangente.



Slika 5.

Treća metoda

Analiza:

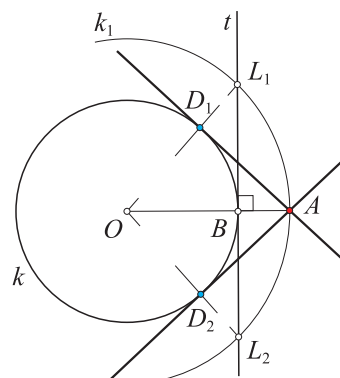


Slika 6.

Skicu na kojoj su nacrtane tangente AD_1 i AD_2 na kružnicu k dopunimo tangentom t kroz točku B koja je presjek dužine $\overline{OA}$ i kružnice k te s pravcima OD_1 i OD_2 . Te spojnice OD_1 i OD_2 sijeku tangentu t u točkama L_1 i L_2 . Na slici su se uz trokute OAD_1 i OAD_2 pojavila još dva pravokutna trokuta OBL_1 i OBL_2 . Dokažimo da su to četiri međusobno sukladna trokuta. Trokuti OAD_1 i OBL_1 su sukladni prema poučku K-S-K o sukladnosti trokuta jer imaju zajednički kut s vrhom O . Oba trokuta imaju pravi kut i katete $\overline{OB}$ i $\overline{OD_1}$ su sukladne jer su to polumjeri kružnice k . I ostale se sukladnosti slično dokazuju. Iz sukladnosti slijedi da je $|OL_1| = |OL_2| = |OA|$, tj. točke L_1, L_2, A jednako su udaljene do točke O , tj. te tri točke leže na kružnici $k_1(O, |OA|)$. Ovime je analiza gotova jer poznavajući činjenicu da točke L_1 i L_2 leže na kružnici k_1 i da pripadaju tangenti t , možemo ih konstruirati, a onda su dirališta D_1 i D_2 točke u kojima spojnice OL_1 i OL_2 sijeku kružnicu k .

Konstrukcija:

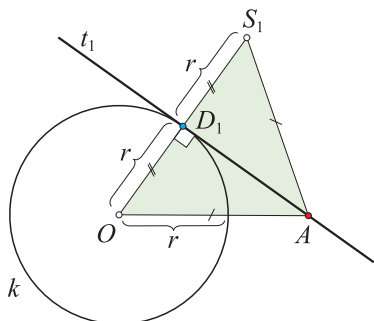
1. kružnica k , točka A
2. $\overline{OA} \cap k = \{B\}$
3. okomica t na $\overline{OA}$ kroz B
4. $k_1(O, |OA|)$
5. $k_1 \cap t = \{L_1, L_2\}$
6. $\overline{OL_1} \cap k = \{D_1\}$, $\overline{OL_2} \cap k = \{D_2\}$
7. pravci AD_1 i AD_2 su tražene tangente.



Slika 7.

Četvrta metoda

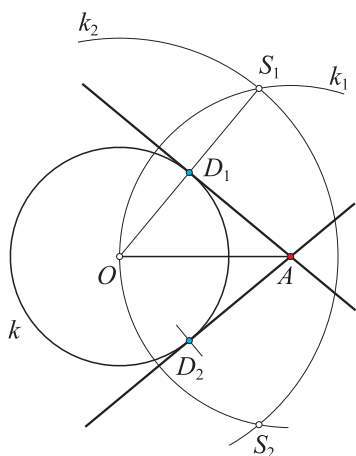
Analiza:



Slika 8.

Skicu na kojoj su kružnica $k(O, r)$, točka A i tangenta AD_1 dopunimo točkom S_1 koja je osnosimetrična točki O s obzirom na pravac AD_1 . Zbog te je osnosimetričnosti trokut OAS_1 jednakokraki s osnovicom OS_1 , a na tangenti AD_1 leži visina AD_1 iz vrha A . Krakovi OA i AS_1 su sukladni, pa su točke O i S_1 jednako udaljene od točke A . Drugim riječima, točka S_1 leži na kružnici $k_1(A, |OA|)$. S druge strane, točka S_1 je od točke O udaljena $2r$ pa se nalazi na kružnici $k_2(O, 2r)$. Time je analiza gotova jer možemo konstruirati točku S_1 kao presjek kružnica k_1 i k_2 , a onda je diralište tangente polovište dužine OS_1 .

Konstrukcija:

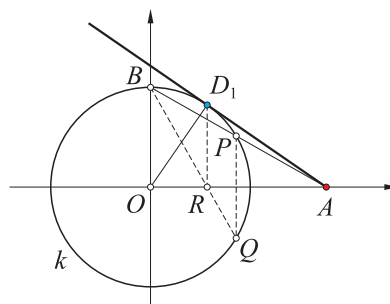


Slika 9.

1. kružnica k , točka A
2. $k_1(A, |OA|)$
3. $k_2(O, 2r)$
4. $k_1 \cap k_2 = \{S_1, S_2\}$
5. D_1 je polovište od OS_1 , D_2 je polovište od OS_2
6. pravci AD_1 i AD_2 su tražene tangente.

Peta metoda

Analiza:



Slika 10.

Skicu na kojoj su kružnica $k(O, r)$, točka A i tangenta AD_1 dopunimo koordinatnim sustavom kojemu je ishodište središte O kružnice k , a x -os je OA . Točku u kojoj kružnica siječe y -os nazovimo B . Spojimo B i A te presjek kružnice k s pravcem AB označimo s P . Točka Q je osnosimetrična točki P s obzirom na x -os. Spojnica BQ siječe x -os u točki R . Dokazat ćemo da je R ortogonalna projekcija točke D_1 na x -os. Time će analiza biti gotova jer poznavajući kružnicu k i točku A , znamo konstruirati točke B , P , Q i R na gore opisani način, a onda se iz R povuče okomica na x -os i ona siječe kružnicu upravo u diralištima D_1 i D_2 .

Dokaz ćemo provesti koordinatnom, tj. analitičkom metodom. Jednadžba kružnice k je $x^2 + y^2 = r^2$, koordinate točaka B , A i D_1 su $B(0, r)$, $A(x_A, 0)$ i $D_1(x_0, y_0)$. Tada je jednadžba tangente u točki D_1 jednaka $x_0x + y_0y = r^2$. Budući da točka A pripada tangenti, vrijedi $x_0x_A + y_0 \cdot 0 = r^2$, tj. $x_A = \frac{r^2}{x_0}$.

Jednadžba pravca AB je $y = -\frac{x_0}{r}x + r$, a njegov presjek s kružnicom k dobivamo kao rješenje sustava

$$y = -\frac{x_0}{r}x + r$$

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Uvrstimo li y iz prve jednadžbe u drugu, dobivamo da je jedno rješenje $x = 0$ (ono će odgovarati točki B), a drugo je $x_P = \frac{2x_0r^2}{r^2 + x_0^2}$. Povratkom u prvu jednadžbu dobivamo $y_P = \frac{r^3 - x_0^2r}{r^2 + x_0^2}$.

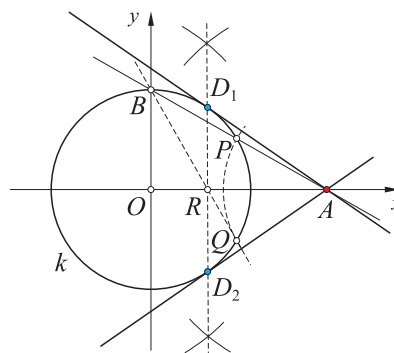
Točka Q ima koordinate $Q(x_P, -y_P)$ pa spojnica BQ ima jednadžbu $y = -\frac{r}{x_0}x + r$ i njezino sjecište s x -osi je $R(x_0, 0)$.

Dakle, točke D_1 i R imaju istu prvu koordinatu, a to znači da se nalaze na okomici $x = x_0$, tj. R je ortogonalna projekcija točke D_1 na x -os, što smo i trebali dokazati. Time je analiza s dokazom gotova.

Konstrukcija:

1. kružnica k , točka A
2. koordinatni sustav
3. B je presjek kružnice i y -osi
4. $AB \cap k = \{P, B\}$

5. Q je osnosimetrična točki P s obzirom na x -os
6. $BQ \cap x\text{-os} = \{R\}$
7. okomica na x -os kroz točku R siječe kružnicu k u točkama D_1 i D_2
8. pravci AD_1 i AD_2 su tražene tangente.



Slika 11.

LITERATURA

- 1/ A. Muminagić (1983.): Razni načini konstruisanja tangente povučene iz tačke izvan kružnice na kružnicu, *Matematički list*, XVIII 4–7.
- 2/ Kurikulum za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u RH, Narodne novine 7/2019.
- 3/ S. Varošaneć (2020.): *Matematika 2, udžbenik za 2. razred gimnazije i strukovnih škola, 3 ili 4 sata nastave tjedno*, Element, Zagreb.

