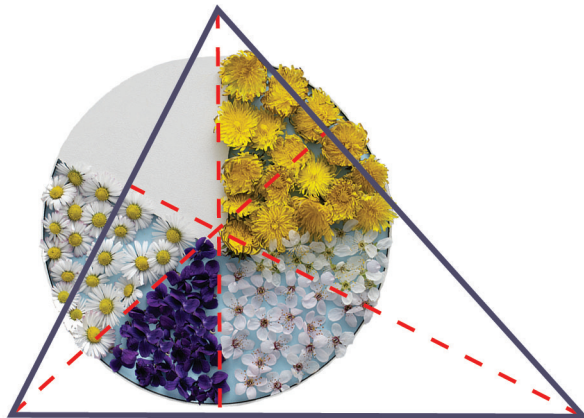


Trokut, pravac i kružnica

Sanja Sruk, Zagreb

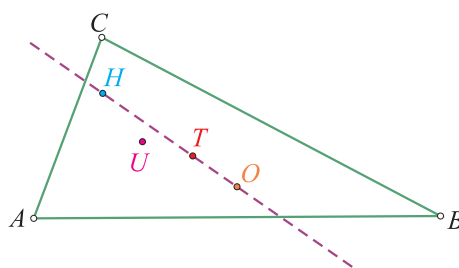


Trokut je geometrijski lik koji već tisućama godina privlači pozornost matematičara. Još u starom Egiptu započelo je proučavanje toga najjednostavnijeg mnogokuta i do danas je poznato mnogo njegovih zanimljivih svojstava koja su opisana u stotinama teorema. U ovom članku upoznat ćemo jedan pravac povezan s trokutom (Simsonov pravac) te jednu kružnicu (kružnica devet točaka).

Simsonov pravac

Tijekom svog školovanja učenici se upoznaju s četirima karakterističnim točkama trokuta i s pravcem kojem pripadaju središte trokutu opisane kružnice (O), težište (T) i ortocentar (H) trokuta. Taj pravac naziva se Eulerov pravac i jednoznačno je određen za svaki trokut osim za jednakostranični (jer kod jednakostraničnog trokuta sve četiri karakteristične točke trokuta su ista točka). Četvrta karakteristična točka trokuta, središte upisane kružnice (U), nikad ne pripada tom pravcu, osim kada je trokut jednakokračan (slika 1). O tome govori sljedeći teorem:

Dan je trokut ABC koji nije jednakostraničan. Središte trokutu ABC upisane kružnice pripada Eulerovu pravcu ako i samo ako je trokut jednakokračan.

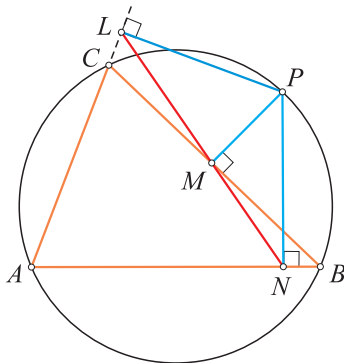


Slika 1. Eulerov pravac

Čak dva različita dokaza ovog teorema možete pronaći u [5].

Za razliku od toga poznatog pravca Simsonov se pravac nigdje ne spominje tijekom srednjoškolskog obrazovanja, a svojom zanimljivošću zaslužuje da mu se posveti malo pažnje.

Simsonov teorem (Wallaceov teorem): Ako iz neke točke P koja pripada opisanoj kružnici trokuta spustimo okomice na pravce na kojima leže stranice trokuta, nožišta tih okomica leže na jednom pravcu.



Slika 2. Simsonov pravac

Dokaz: Označimo li nožišta okomica iz točke P na pravce na kojima leže stranice trokuta s L , M i N kao na slici 2, kolinearost ćemo dokazati tako da dokažemo da su kutovi $\sphericalangle NMP$ i $\sphericalangle PML$ suplementarni, tj. da vrijedi:

$$\sphericalangle NMP + \sphericalangle PML = 180^\circ.$$

Četverokut $ABPC$ je tetivni pa je

$$\sphericalangle PBA + \sphericalangle ACP = \sphericalangle PBN + \sphericalangle ACP = 180^\circ. \quad (1)$$

Ako nad $\overline{PB}$ i $\overline{PC}$ kao promjerima opišemo kružnice, vidimo da su i četverokuti $PMNB$ i $PLCM$ tetivni (Talesov poučak o obodnom kutu nad promjerom kružnice), pa vrijedi:

$$\sphericalangle PBN + \sphericalangle NMP = 180^\circ,$$

a zbog (1) zaključujemo:

$$\sphericalangle NMP = \sphericalangle ACP. \quad (2)$$

Nadalje, kako je četverokut $PLCM$ tetivni, kutovi $\sphericalangle PML$ i $\sphericalangle PCL$ su sukladni (jer su obodni kutovi nad tetivom $\overline{PL}$) pa iz

$$\sphericalangle PML = \sphericalangle PCL = 180^\circ - \sphericalangle ACP$$

i iz (2) slijedi

$$\sphericalangle NMP + \sphericalangle PML = \sphericalangle ACP + (180^\circ - \sphericalangle ACP) = 180^\circ,$$

dakle točke L , M i N su kolinearne.

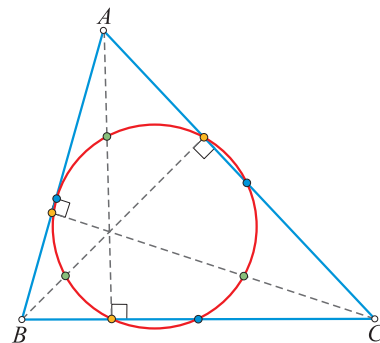
Opisani pravac naziva se **Simsonov pravac** točke P s obzirom na trokut ABC . Ime je neopravdano dobio prema škotskom matematičaru Robertu Simsonu (1687. – 1768.) jer u njegovim radovima nikad nije pronađeno ništa vezano za taj pravac. Dokaz teorema objavio je 1799. godine William Wallace (1768. – 1843.), a prema nekim podacima to je svojstvo bilo poznato i ranije.

Vrijedi i obrat Simsonova (Wallaceova) teorema: Ako okomice iz neke točke P na pravce na kojima leže stranice trokuta pripadaju jednom pravcu, onda točka P leži na kružnici koja je opisana tom trokutu.

Kružnica devet točaka

Kad se govori o trokutu, obično se spominju opisana i upisana kružnica, eventualno i pripisane kružnice (kružnice koje dodiruju jednu stranicu trokuta i produžetke preostalih dviju stranica). Manje je poznata kružnica devet točaka (k_9), koja se još naziva Feuerbachova kružnica ili Eulerova kružnica, a ponekad i Terquemova kružnica (slika 3). Ona prolazi kroz:

- nožišta visina trokuta
- polovišta stranica trokuta
- polovišta dužina koje spajaju vrh trokuta i ortocentar.



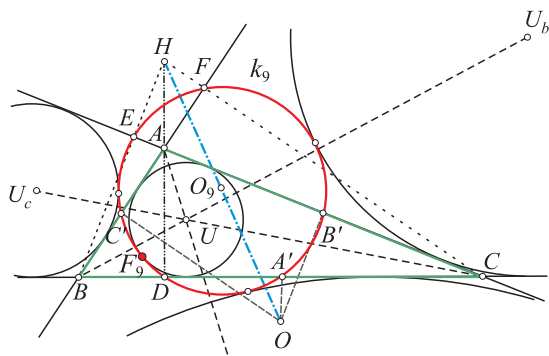
Slika 3. Kružnica devet točaka

Švicarski matematičar Leonhard Euler (1707. – 1789.) je 1765. godine uočio da polovišta stranica trokuta i nožišta visina leže na istoj kružnici, tj. da su konciklične točke, a neovisno o njemu do istog je rezultata došao i Karl Wilhelm von Feuerberg (1800. – 1834.), kao i Charles Brianchon i Jean-Victor Poncelet koji su dokazali koncikličnost tih šest točaka. Da istoj kružnici pripadaju i polovišta dužina koje spajaju vrh i ortocentar dokazao je Olry Terquem (1782. – 1862.). On je također prvi upotrijebio naziv "kružnica devet točaka". Središte joj se tradicionalno označava s O_9 .

Zanimljivosti

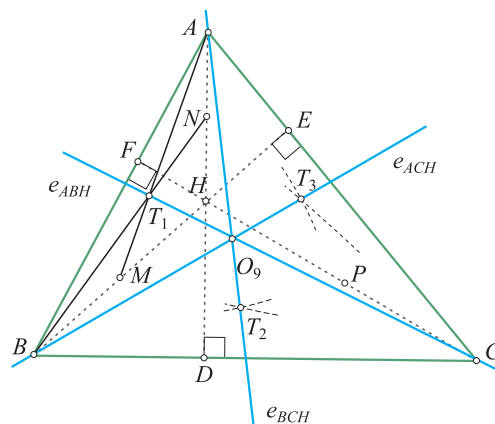
Uz kružnicu devet točaka, kao i druge kružnice povezane s trokutom (opisana, upisana, pripisane) te Eulerov i Simsonov pravac vežu se mnogobrojne zanimljive činjenice dokazane u raznim teoremima. Nemoguće je navesti sve, čak su i dokazi ovih dvanaest zanimljivosti/teorema koje sam odabrala preopširni za ovaj članak pa su samo popraćeni slikom.

1. Kružnica devet točaka dodiruje kružnicu upisanu trokutu i sve tri pripisane kružnice (Feuerbachov teorem). Pripisane kružnice dodiruje izvana, a upisana ju dodiruje iznutra. Diralište upisane kružnice i k_9 naziva se **Feuerbachova točka** F_9 .



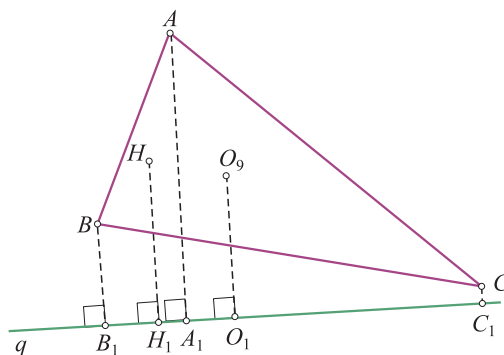
Slika 4. Točke U_b i U_c središta su pripisanih kružnica, U je središte upisane kružnice trokuta ABC , točke D , E i F su nožišta visina, a točke A' , B' i C' su polovišta stranica trokuta ABC .

2. Eulerovi pravci trokuta ABH , BCH i CAH sijeku se u jednoj točki. Ako trokut ABC nije pravokutan, onda trokuti ABC , ABH , BCH i CAH imaju zajedničku kružnicu devet točaka, a kružnice opisane navedenim trokutima imaju jednake polumjere.



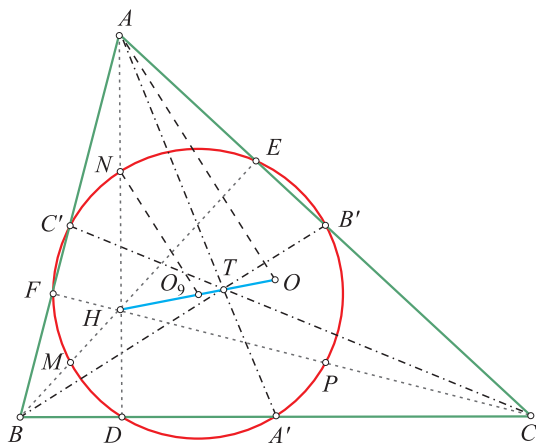
Slika 5. Točke D , E i F su nožišta u trokutu ABC i H mu je ortocentar. Točke N , M i P su polovišta dužina $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ i $\overline{CH}$. $\overline{AM} \cap \overline{BN} = \{T_1\}$, T_1 je težište trokuta ABH . $\overline{AE}$ i $\overline{HF}$ su visine trokuta ABH pa je $\overline{AE} \cap \overline{HF} = \{C\}$ ortocentar za trokut ABH . $e_{ABH} = CT_1$ je Eulerov pravac trokuta ABH . Analogno, e_{BCH} i e_{ACH} su Eulerovi pravci trokuta BCH i ACH . Sijeku se u O_9 .

3. Udaljenost središta opisane i upisane kružnice nekog trokuta jednaka je $R^2 - 2Rr$, gdje su R i r polumjeri tih kružnica.
4. Zbroj udaljenosti od vrhova trokuta i ortocentra do bilo kojeg pravca u ravni jednak je četverostrukoj udaljenosti središta kružnice devet točaka od tog pravca.



Slika 6. $|AA_1| + |BB_1| + |CC_1| + |HH_1| = 4|O_9O_1|$

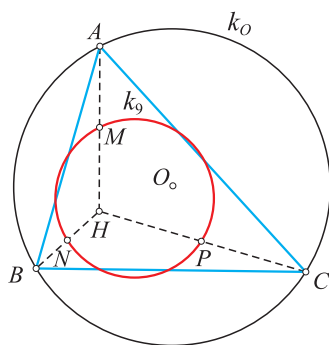
5. Središte O_9 kružnice devet točaka leži na Eulerovu pravcu i raspolažja $\overline{OH}$, pri čemu je O središte trokutu opisane kružnice, a H ortocentar (slika 7).



Slika 7.

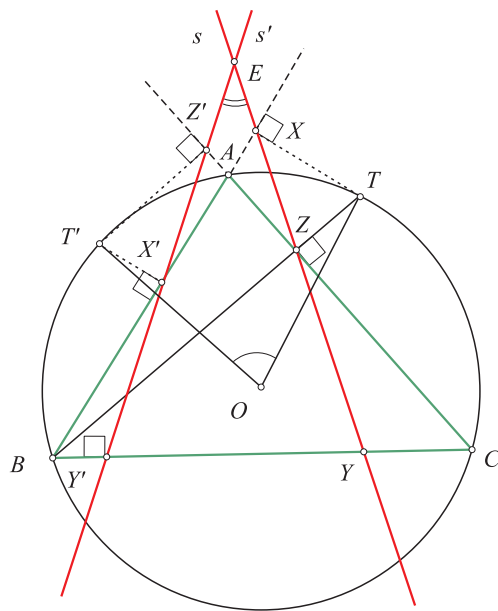
6. Udaljenost središta kružnice devet točaka od ortocentra je tri puta veća od udaljenosti njenog središta od težišta, tj. $|O_9H| = 3|O_9T|$, a također vrijedi i $|OT| = 2|TO_9|$ (slika 7).

7. Opisana kružnica i kružnica devet točaka su homotetične, pri čemu je centar homotetije H , a koeficijent 2. Zbog toga kružnica devet točaka raspolažja svaku dužinu koja spaja H s nekom točkom opisane kružnice.



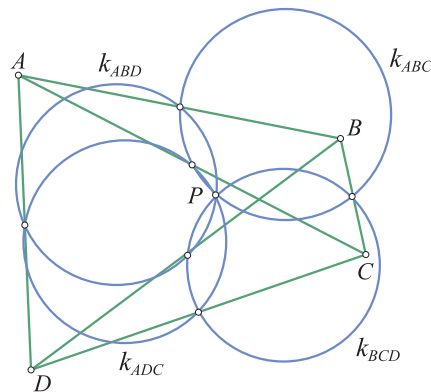
Slika 8.

8. Ako su T i T' dvije točke na kružnici opisanoj trokutu, a s i s' njima pripadajući Simsonovi pravci, onda je $\angle(s, s')$ jednak polovini središnjeg kuta nad lukom $\widehat{TT'}$.



Slika 9. $|\angle s'Es| = \frac{1}{2} |\angle TOT'|$

9. Ako su A, B, C i D četiri točke među kojima ne postoje tri kolinearne, onda se kružnice devet točaka trokuta ABC , ABD , ACD i BCD sijeku u jednoj točki (Ponceletova točka četvorke A, B, C, D).

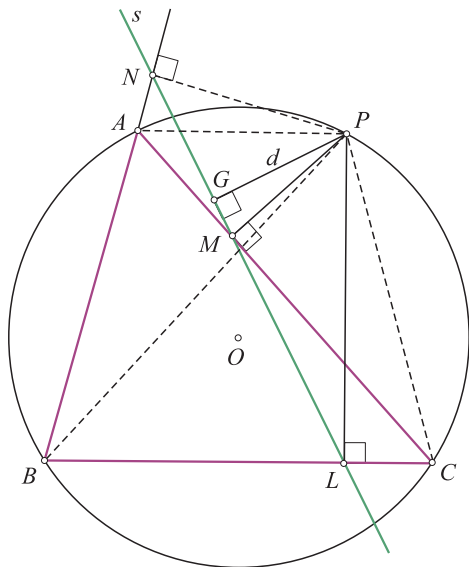


Slika 10. Kružnice k_{ABC} , k_{BCD} , k_{ADC} i k_{ABD} su kružnice devet točaka trokuta ABC , BCD , ADC i ABD .

10. Neka je P točka opisane kružnice trokuta ABC , a L, M, N nožišta okomica iz P na BC, AC, AB redom. Točke L, M, N određuju Simsonov pravac s .

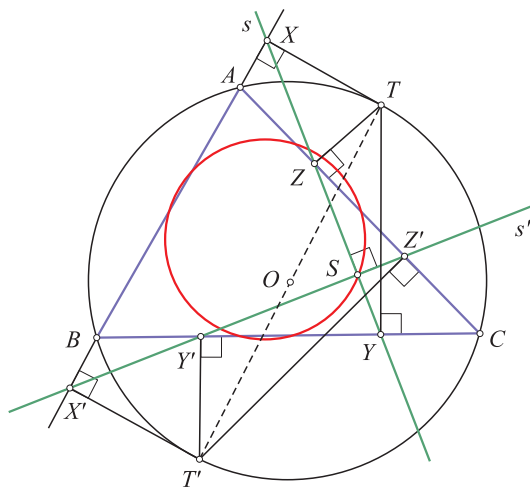
Ako s d označimo udaljenost točke P od Simsonova pravca, a s R polumjer kružnice opisane trokutu, tada vrijedi:

$$|PA| \cdot |PL| = |PB| \cdot |PM| = |PC| \cdot |PN| = 2Rd.$$



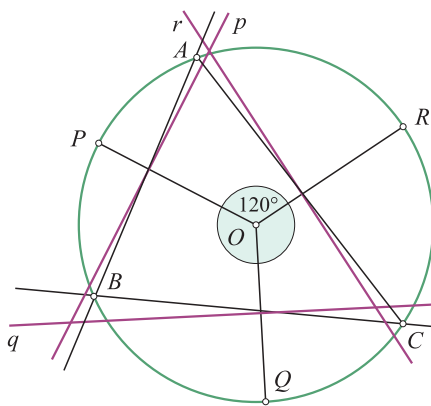
Slika 11.

11. Ako su točke T i T' dvije dijametralno suprotne točke na opisanoj kružnici trokuta, onda su njihovi Simsonovi pravci okomiti i sijeku se u točki koja pripada kružnici devet točaka (slika 12).



Slika 12.

12. Ako točke P , Q i R određuju tri jednaka luka na kružnici koja prolazi tim trima točkama, tada Simsonovi pravci p , q i r tih točaka (s obzirom na bilo koji trokut upisan u tu kružnicu) određuju jednakostranični trokut (slika 13).



Slika 13.

Zadivljujuće je koliko pravilnosti u sebi krije jedan nepravilan lik kao što je raznostranični trokut. Zato i nakon nekoliko tisuća godina proučavanja matematičari stalno otkrivaju nova svojstva i zanimljivosti o tom jednostavnom liku.

LITERATURA

- 1/ M. Alilović, *Značajni pravci u geometriji trokuta*, <https://zir.nsk.hr/islandora/object/mathos%3A227>
- 2/ A. Blažević, *Eulerova kružnica*, <https://zir.nsk.hr/islandora/object/mathos:216/preview>
- 3/ M. Mikulić, *Feuerbachova kružnica i Simsonov pravac*, <https://repositorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A5308>
- 4/ D. Palman (1994.): *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb.
- 5/ M. Starčević, *Središte trokutu upisane kružnice i Eulerov pravac*, *Matematičko-fizički list*, br. 156, godište LXVII, <https://hrcak.srce.hr/file/341505>