

Tko je prvi... uveo broj e ?

Franka Miriam Brueckler, Zagreb

Znamenita Eulerova formula, koju mnogi smatraju najljepšom matematičkom formulom svih vremena, povezuje pet najpoznatijih matematičkih konstanti 0 , 1 , i , π , e :

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Broj 1 je, kako bi rekli pitagorejci, počelo svih brojeva (pri čemu su oni, kao i većina antičkih grčkih matematičara, pod brojevima podrazumijevali isključivo prirodne brojeve). Budući da su pitagorejci prvi počeli gledati brojeve kao apstrakne, samostalne objekte, a ne samo kao pridjeve, možemo reći da se konstanta 1 prvi put pojavljuje kod pitagorejaca, u 6. st. pr. Kr. O prvim pojavama triju drugih konstanti iz Eulerove formule već smo govorili u ovom našem serijalu: o broju π u broju 84, o imaginarnoj jedinici u broju 96 i o nuli u broju 107. E, sad je vrijeme reći nešto o e !

Konstanta e često se naziva Eulerovim brojem, pa zasigurno mnogi misle kako ju je prvi uveo znameniti švicarski matematičar **Leonhard Euler** (1707. – 1783., slika 1). No, povijest broja e je ipak jedno stotinu godina starija. Implicitno, ova se važna konstanta prvi put pojavljuje kod škotskog



Slika 1. Leonhard Euler, preuzeto s Wikipedije (public domain).

plemića i hobi-matematičara **Johna Napiera** (1550. – 1617., slika 2), u njegovoj konstrukciji logaritama 1614. O njoj ćemo više reći u sljedećem, posljednjem nastavku ovoga serijala. Zasad samo ovoliko: Napierovi logaritmi još nisu bili logaritmi u moder-

nom smislu riječi, što uključuje da ideja *baze logaritma* kod njega još nije postojala. No, može se pokazati da je Napierov logaritam broja x ono što bismo danas zapisali kao $10^7 \ln \left(\frac{10^7}{x} \right)$,

dakle je u Napierovoj konstrukciji prve tablice logaritama "skriven" broj e .

No, Napier zasigurno još nije razmišljao o tom broju i njegovoj prirodi. U sljedećim desetljećima broj e se pojavio više puta isto tako "kriomice", bez eksplicitnog spomena.



Slika 2. John Napier, preuzeto s Wikipedije (public domain).

Svakako, jedna od glavnih prepreka uočavanju te važne matematičke konstante je bila ta što se o logaritmima u to doba još nije razmišljalo kao danas, kao inverznim funkcijama eksponencijalnih funkcija, dakle kao o funkcijama definiranim putem baze. U početku su logaritmi bili samo pomagalo za pojednostavljivanje raznih izračuna koji su uključivali množenje i dijeljenje. No, nakon sredine 17. stoljeća ipak se postepeno sve više produbljivalo razumijevanje logaritama. Tako je njemački matematičar **Nicolaus Mercator** (1620. – 1687.), godine 1668. u svojoj *Logarithmotechnia* opisao izračun površine ispod istostrane hiperbole $y = \frac{1}{1+x}$, u granicama od 0 do t , dakle ono što bismo danas zapisali kao $\int_0^t \frac{dx}{1+x}$, i dobio da je površina

$$t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots^1$$

doc. dr. sc. Franka Miriam Brueckler, Sveučilište u Zagrebu Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odsjek, bruckler@math.hr

¹ Mercator ovaj red potencija opisuje samo riječima. Također, nije istaknuo da je to točno samo za $0 < t < 1$. Naime, u to doba pojam konvergencije reda još nije bio jasno definiran, a mnogi matematičari uopće nisu obraćali pažnju na područje konvergencije reda potencija iako su s njima baratali.

Pritom navodi da bi se to moglo zvati “prirodnim” logaritmom od $1 + t$ te možemo reći da se tu po prvi put pojavljuje logaritam s bazom e , ali još uvijek bez spominjanja broja e .

Začudujuće, prva eksplicitna pojava broja e nije uopće bila vezana za logaritme. Naime, švicarski matematičar **Jacob Bernoulli** (1655. – 1705., slika 3) se 1683. bavio problemom uzastopnog ukamaćivanja. Prisjetimo se: Ako se kamate od $p\%$ pripišu glavnici G nakon temeljnog vremenskog intervala, recimo 1 godine, imat ćemo iznos $(1 + p/100)G$. Zamislimo sad da se kamate od $p\%$ umjesto odjednom na kraju godine pripisuju dvaput, pola ($p/2\%$) nakon pola godine i onda ostatak na kraju godine. U tom slučaju nakon pola godine imamo $(1 + p/200)G$, a na kraju godine $(1 + p/200)^2 G$. Nastavimo li razmišljati – a tako je razmišljao Jacob Bernoulli – što bi se dogodilo ako kamate umjesto odjednom na kraju godine pripisujemo n puta kroz godinu, ali u iznosima $p/n\%$. Vidimo da u tom slučaju na kraju godine imamo iznos $\left(1 + \frac{p}{100n}\right)^n G$. Što je veći n , to će i taj iznos biti veći (ali će povećanje n sve sporije, tj. sve manje, doprinositi porastu tog konačnog iznosa). Uzmemo li jednostavnosti radi da je $G = 1$ i $p = 100$, vidimo da razmatramo ponašanje niza $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Navedena razmišljanja navela su Jacoba Bernoullija da postavi hipotezu kako taj niz ima graničnu vrijednost kad n postaje neograničeno velik. Koristeći se binomnim teoremom pokazao je da ta granična vrijednost postoji i da ima iznos između 2 i 3, a uspio ju je (uvrstavanjem n -ova) izračunati na 6 decimala. Stoga, ako jednakost

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

uzmemo kao definiciju broja e , što je jedna od uobičajenijih mogućnosti, možemo reći da je broj e prvi uveo, ili otkrio, Jacob Bernoulli 1683. godine. No, iako postoje naznake da je on uočio i inverznost logaritamske i eksponencijalne funkcije, Jacob Bernoulli svakako još nije uočio vezu između e i logaritama. S druge strane, veza između eksponencijalne i logaritamske funkcije uočena je u

isto doba (James Gregory, 1684.), a 1690. broj e se (označen s b) prvi put eksplicitno pojavljuje u jednom pismu **Gottfried Wilhelm Leibniza** (1646. – 1716.) Christiaan Huygensu (1629. – 1695.), koji je također jedan od znanstvenika koji su ranije uočili vezu između istostrane hiperbole i logaritma.



Slika 3. Jacob Bernoulli, preuzeto s Wikipedije (public domain).

Zašto onda e ne zovemo Bernoullijevim ili eventualno Leibnizovim brojem? Razlog je vrlo jednostavan: Leonhard Euler je ne samo uveo njegovu modernu oznaku (ne kao svoj inicijal, nego vjerojatno vezano za prvo slovo riječi “eksponencijalan” ili pak zato jer je prvi samoglasnik a već koristio u druge svrhe), nego je 1748. u svojoj znamenitoj *Introductio in Analysin infinitorum* prvi dao potpunu analizu činjenica vezanih za e (a ujedno je i prvi matematičar koji sustavno logaritme gleda kao inverze eksponencijalnih funkcija, dakle na moderni način). Euler je dokazao da je e suma reda s općim članom $\frac{1}{n!}$:

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots,$$

dobio je aproksimaciju od e točnu na 18 decimala (dakle 2.718281828459045235), izveo je opću Eulerovu formulu $\cos x + i \sin x = e^{ix}$, izveo verižni razlomak za e , dokazao da je e iracionalan broj... Danas naravno znamo da je e i “gore” od samo iracionalnog, naime da je transcendentan broj: hipotezu da je e transcendentan postavio je 1761. Johann Heinrich Lambert, a da je ta hipoteza točna, dokazao je Charles Hermite 1873.

LITERATURA

- 1/ M. Benšić, G. Benšić (2011.): Kamatni račun, *Osječki matematički list*, 11, 113126.
- 2/ F. M. Brueckler (2017.): *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik*, Springer Spektrum.
- 3/ F. M. Brueckler (2018.): *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*, Springer Spektrum.
- 4/ MacTutor History of Mathematics Archives: *The number e*, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/e/> (pristupljeno 30. 3. 2022.)
- 5/ J. Najera, *The History of Euler's Number (e)*, <https://www.cantorsparadise.com/the-history-of-eulers-number-e-8c982994a39b> (pristupljeno 30. 3. 2022.)

$$\text{Zašto je } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e \text{ ako } x_n \rightarrow \infty$$

U 4. razredu srednje škole otkriva se i dokazuje da je niz s općim članom $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergentan i njegov se limes naziva e . A potom se bez mnogo objašnjenja računa limes niza u kojem umjesto n stoji neki drugi izraz koji teži k ∞ . Primjerice, standardni zadatci vezani za ovu vrstu limesa su zadatci u kojima se traži određivanje limesa kao što su: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8}{n-2}\right)^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{5n-1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{100n}\right)^{nm}$ (neprekidno ukamaćivanje) itd.

Evo i postupka rješavanja prvog od navedenih limesa.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8}{n-2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{8}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{8}}\right]^{\frac{8n}{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{8}{n-2}\right)^{\frac{n-2}{8}}\right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n}{n-2}} = e^8.$$

Očito je da se ovdje koristilo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$ pri čemu je (x_n) niz realnih brojeva koji teži prema ∞ . Pa dokažimo da je to stvarno i istinita tvrdnja.

Neka je (m_n) niz prirodnih brojeva koji teži u ∞ . Iz osnovnog limesa $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ slijedi da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji broj $N_\varepsilon \in \mathbf{N}$ takav da vrijedi $\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon$ za sve $n > N_\varepsilon$. Ali tada i za sve m_n koji su veći od N_ε vrijedi ista nejednakost, tj. $\left|\left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} - e\right| < \varepsilon$. Drugim riječima, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} = e$.

Budući da niz (x_n) teži k ∞ , nakon nekog mjesta u nizu (označimo to mjesto s n_0) svi članovi su pozitivni i svaki takav član x_n zadanog niza uklještimo između prirodnog broja i njegovog sljedbenika, tj. za svaki $n \in \mathbf{N}$, $n > n_0$, postoji $m_n \in \mathbf{N}$ takav da je $m_n \leq x_n < m_n + 1$. Tada je

$$\frac{1}{m_n + 1} < \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{m_n}, \text{ tj. } \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{x_n} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{x_n},$$

a kad još iskoristimo da je $m_n < x_n \leq m_n + 1$, dobijemo

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n + 1}}{1 + \frac{1}{m_n + 1}} = \left(1 + \frac{1}{m_n + 1}\right)^{m_n} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n + 1} = \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \cdot \left(1 + \frac{1}{m_n}\right).$$

Kad pustimo da n teži u ∞ , prema teoremu o sendviču (prvi i peti niz teže k e) dobivamo da i srednji niz teži k e , što smo i trebali dokazati.