

Kako izravnati kružnicu

– uz Dan broja π



Sanja Varošaneć, Zagreb

Datum 14. ožujka u formatu zapisa datuma “mjesec/dan” ima oblik 3/14 te se od 1988. godine obilježava kao Dan broja π , a u studenom 2019. UNESCO proglašava taj datum Međunarodnim danom matematike.

Ovaj je panoptikum posvećen problemu rektifikacije kružnice, tj. problemu konstruiranja dužine duljine $2r\pi$. Rektifikacija kružnice, kao i tom problemu srodni problem konstrukcije broja π i kvadratura kruga golicaju maštu ljudi od pamtivijeka. Čak i najstariji poznati matematički rukopis Rhindov papirus (16. stoljeće pr. Kr.) opisuje pravilo prema kojem kvadrat kojemu je stranica $\frac{8}{9}$ promjera kruga ima površinu kao i taj krug. Prevedemo li taj rezultat u moderan zapis, dobiva se da je π približno 3.16049. U matematici svake civilizacije nalazimo rezultate vezane za ovu problematiku. Kad je 1882. godine F. Lindemann dokazao da je π transcendentan broj, postalo je jasno da se broj π ne može elementarno konstruirati, tj. nacrtati u konačno mnogo koraka korištenjem ravnala i šestara proizvoljno velikog raspona. Posljedično, i rektifikacija kružnice i kvadratura kruga su nerješivi uz navedeni pribor. Ali razvijeno je mnogo približnih konstrukcija. U panoptikumu je prikazano 5 približnih konstrukcija.

Kad se u nacrtnoj geometriji pojavi potreba rektifikacije kružnice, primjerice kod crtanja plašta valjka, najčešće se koristimo konstrukcijom Kochanskog čiji je postupak opisan u prvoj konstrukciji u panoptikumu. Izraz

$$|BD| = r\sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}}$$

slijedi iz primjene Pitagorina poučka u trokutu ABD . Prokomentirajmo razliku između $|BD|$ i broja $r\pi$. Ljudsko oko ne može razlikovati dvije točke čija je udaljenost manja od $\frac{1}{20}$ mm, pa iz ocjene

$||BD| - r\pi| < \frac{1}{20}$ dobivamo da za $r < 84.3$ cm ne vidimo razliku između $\overline{BD}$ i $r\pi$. U nacrtnoj geometriji polumjeri kružnica obično su manji od 84 cm, pa ova konstrukcija zadovoljava potrebe nacrtne geometrije.

U drugoj i trećoj konstrukciji jasno je kako se dokazuju izrazi za $|FH|$ i $|AD|$, pa pobliže opišimo kako

se dokazuje izraz

$$|OE| = \frac{r}{3} \sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}}$$

u Ramanujanovoj konstrukciji. Redom računajmo duljine dužina koje se javljaju u konstrukciji. Primjenom Pitagorina poučka u trokutima AMC i ANC dobivamo:

$$|AM| = \sqrt{(r\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{3}r\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{3}r,$$

$$|AN| = \sqrt{(r\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2}{3}r\right)^2} = \frac{\sqrt{22}}{3}r.$$

Iz sličnosti trokuta APQ i ANM dobivamo:

$$|AN| : |AP| = |AM| : |AQ|,$$

$$|AQ| = \frac{19}{3\sqrt{22}}r.$$

Iz $\triangle AOQ \sim \triangle ATR$ slijedi

$$|AR| = \frac{1}{3}|AQ| = \frac{19}{9\sqrt{22}}r.$$

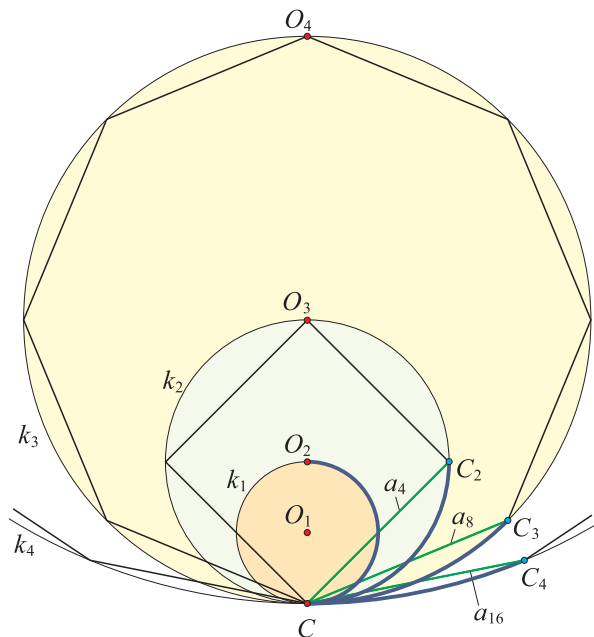
Prema Pitagorinu poučku za $\triangle AOS$ imamo

$$|OS| = r\sqrt{1 + \frac{19^2}{81 \cdot 22}}$$

i konačno, primjenom Euklidova poučka u pravokutnom trokutu $S'EB$ za njegovu visinu $\overline{OE}$ na hipotenuzu $\overline{S'B}$ vrijedi

$$|OE|^2 = |OB| \cdot |OS'|, \text{ tj. } |OE| = \frac{r}{3} \sqrt[4]{9^2 + \frac{19^2}{22}}.$$

Peta konstrukcija zasniva se na promatranju niza pravilnih mnogokuta kojima se u svakom sljedećem koraku polumjer opisane kružnice udvostručuje. Dakle, imamo niz kružnica $k_1(O_1, r)$, $k_2(O_2, 2r)$, $k_3(O_3, 2^2r)$, $k_4(O_4, 2^3r)$, ... pri čemu su $O_1, O_2, O_3, O_4, \dots$ kolinearne točke, a sve kružnice prolaze točkom C . Rektificiramo polovinu najmanje kružnice k_1 , tj. tražimo dužinu duljine $r\pi$.



Slika 1.

Budući da je duljina kružnice k_2 $4r\pi$, slijedi da je $r\pi$ četvrtina duljine kružnice k_2 . U kružnice $k_2, k_3, k_4, \dots, k_n, \dots$ upišimo pravilne mnogokute s $2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^n, \dots$ stranica. Stranice su $\overline{CC_2}, \overline{CC_3}, \overline{CC_4}, \dots, \overline{CC_n}, \dots$. Središnji kutovi mnogokuta su

$$\varepsilon_2 = \frac{360^\circ}{2^2}, \varepsilon_3 = \frac{360^\circ}{2^3}, \varepsilon_4 = \frac{360^\circ}{2^4}, \dots, \varepsilon_{2^n} = \frac{360^\circ}{2^n},$$

a duljine pripadnih lukova su

$$l = \frac{2^{n-1}r\pi}{180^\circ} \cdot \frac{360^\circ}{2^n} = r\pi.$$

Dakle, u svakom pravilnom 2^n -terokutu duljina luka $\widehat{CC_n}$ sa središnjim kutom $\varepsilon_{2^n} = \frac{360^\circ}{2^n}$ jednaka je $r\pi$, tj. neovisna je o broju n . Tetiva tog luka je stranica $\overline{CC_n}$ pravilnog mnogokuta i njezina duljina je

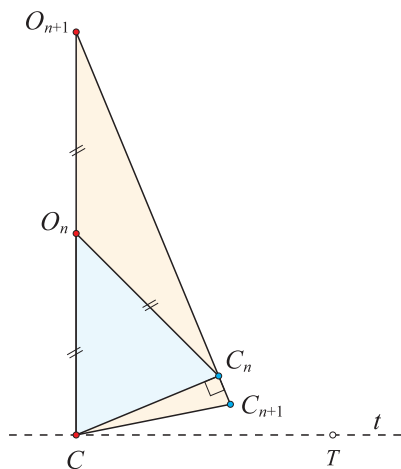
$$a_{2^n} = 2^n r \sin \frac{180^\circ}{2^n}.$$

Povećanjem broja n raste polumjer kružnice, pa lukovi duljine $r\pi$ nad središnjim kutom imaju sve manje zakrivljenosti i razlika između duljine luka i duljine pripadne tetive postaje sve manja. Drugim

riječima, duljine stranica mnogokuta približavaju se broju $r\pi$, tj. $r\pi \approx a_{2^n}$.

Ali postupak konstrukcije pravilnih mnogokuta sa sve većim polumjerima opisanih kružnica dovodi do stvaranja vrlo velikog crteža koji brzo prelazi granice crtaćeg papira. Zato treba pronaći način da točke C_n , tj. stranice mnogokuta $\overline{CC_n}$ konstruiramo bez crtanja pravilnih mnogokuta.

Pogledajmo uvećan dio slike na kojoj se nalaze dva uzastopna koraka ove konstrukcije. Pokažimo da su točke O_{n+1} , C_n , C_{n+1} kolinearne kao što je prikazano na slici.



Slika 2. $CO_n C_n$ i $CO_{n+1} C_{n+1}$ su karakteristični trokuti pravih mnogokuta s 2^n i 2^{n+1} vrhova.

Prema opisanoj konstrukciji C_n je vrh pravilnog mnogokuta upisanog u $k_n(O_n, 2^{n-1}r)$, tj. $\triangle CO_n C_n$ je karakteristični trokut mnogokuta s 2^n vrhova.

Dakle, $|\sphericalangle CO_n C_n| = \frac{360^\circ}{2^n}$. Točka O_{n+1} je također na kružnici $k_n(O_n, 2^{n-1}r)$ pa je $\sphericalangle CO_{n+1} C_n$ obodni kut kružnice k_n te prema teoremu o obodnom i središnjem kutu veličina mu je

$$|\nabla CO_{n+1}C_n| = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{2^n} = \frac{360^\circ}{2^{n+1}}.$$

S druge strane, $\triangle CO_{n+1}C_{n+1}$ je karakteristični trokut mnogokuta upisanog u k_{n+1} i središnji kut je $\frac{360^\circ}{2^{n+1}}$, tj. $|\angle CO_{n+1}C_{n+1}| = \frac{360^\circ}{2^{n+1}}$. Budući da kutovi $\angle CO_{n+1}C_n$ i $\angle CO_{n+1}C_{n+1}$ imaju istu veličinu

i zajednički krak, slijedi da $C_n \in O_{n+1}C_{n+1}$, tj. te tri
točke O_{n+1} , C_n , C_{n+1} su kolinearne.

U karakterističnom trokutu CO_nC_n ostali kutovi (kutovi uz osnovicu) imaju veličinu

$$|\sphericalangle C_n C O_n| = 90^\circ - \frac{180^\circ}{\gamma_n},$$

a u trokutu $CO_{n+1}C_{n+1}$ vrijedi $|\sphericalangle C_{n+1}CO_{n+1}| = 90^\circ - \frac{180^\circ}{2^{n+1}}$.

Neka je $t = CT$ tangenta na kružnicu k_1 , tj. $CT \perp CO_n$. Tada je

$$|\sphericalangle TCC_n| = 90^\circ - |\sphericalangle C_nCO_n| = \frac{180^\circ}{\gamma_n}$$

$$|\nabla TCC_{n+1}| = \frac{180^\circ}{2^{n+1}},$$

tj. $\sphericalangle TCC_n$ je dvostruko veći od kuta $\sphericalangle TCC_{n+1}$, tj. CC_{n+1} je simetrala kuta TCC_n .

Izračunajmo kut pri vrhu C_n u trokutu $CC_{n+1}C_n$:

$$|\angle CC_n C_{n+1}| = 180^\circ - \frac{180^\circ}{2^{n+1}} - \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{2^{n+1}}\right) = 90^\circ,$$

dakle $CC_n \perp C_n C_{n+1}$.

Stoga, kad poznajemo položaj točke C_n , tada se C_{n+1} nalazi na simetrali kuta $\angle TCC_n$, a s druge strane C_{n+1} se nalazi na okomici na CC_n kroz točku C_n . Ova se konstrukcija može izvoditi proizvoljan broj puta, a pri tome $|CC_n| = a_{2^n}$ teži prema $r\pi$.

Primjerice, $a_{29} = 2^9 r \sin \frac{180^\circ}{2^9} \approx 3.14157294r$
dok je $r\pi \approx 3.141592654$, odnosno greška je
 $|r\pi - a_9| < 2 \cdot 10^{-5}r$.

LITERATURA

- 1/ B. Pavković, D. Veljan (1992.): *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb.
- 2/ S. Škarica (1951.): *Kvadratura kruga*, Školska knjiga, Zagreb.
- 3/ *How to Unroll a Circle with a Straightedge and a Compass*, www.song-of-songs.net/Squaring_the_Circle.html