

Taksi-geometrija

matematička vožnja po Idealnom Gradu



*Vedrana Mikulić Crnković i
Dina Mlacović, Rijeka*

Taksi-geometrija opisuje geometriju Idealnog Grada. Njome pomažemo stanovnicima Idealnog Grada da se jednostavnije u njemu snalaze.

Motivacija

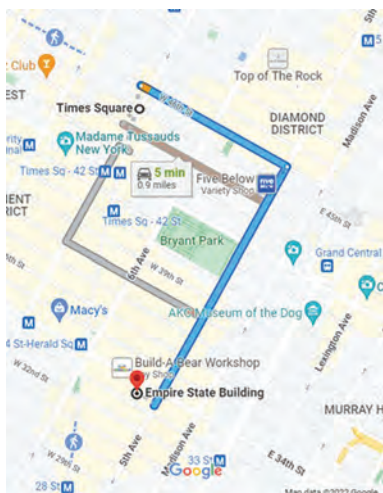
Formulu za udaljenost između dviju točaka u koordinatnom sustavu u ravni znaju učenici srednje škole. Tu udaljenost često u svakodnevnom životu nazivamo zračna udaljenost. Iako je zračna udaljenost između Rijeke i Zagreba 131.33 km, svjesni smo da će, putujemo li automobilom, naš put od Rijeke do Zagreba biti dulji od navedenog. U nastavku ćemo opisati geometriju u kojoj udaljenost između dviju točaka računamo drukčijom formulom, ali i geometriju koja nam omogućuje da planiramo izgradnju naselja u kojima ćemo se lako snalaziti, u kojima ćemo lako računati duljinu najkraćeg puta između svakih dviju točaka, u kojima će se taksisti lakše snalaziti i bolje planirati svoje vožnje.

Diskretna taksi-geometrija

Za početak uvodimo pojam Idealnog Grada. To je grad u kojemu su svake dvije ulice ili međusobno paralelne ili međusobno okomite te su udaljenosti između svaka dva raskrižja izražene u metrima prirodnih brojeva.

Taksi-geometrija često se naziva i manhatanskom geometrijom iz razloga što je Manhattan model Idealnog Grada. Upravo će taksi, odnosno manhatanska geometrija, pomoći vozaču taksija u New Yorku planirati svoje vožnje. Na slici 1, preuzetoj iz aplikacije Google Maps, naznačene su ulice na Manhattanu te je istaknut jedan od mogućih putova kojim nas žuti taksi može odvesti od trga Times Square do zgrade Empire State Building.

izv. prof. dr. sc. Vedrana Mikulić Crnković, Fakultet za matematiku, Sveučilište u Rijeci, vmikulic@math.uniri.hr
Dina Mlacović, mag. educ. math. et inf., Katolička osnovna škola Josip Pavlišić, Rijeka, dinamlacovic@gmail.com



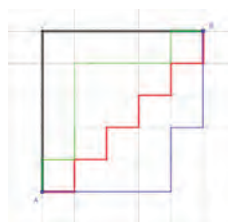
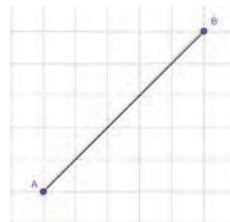
Slika 1. Manhattan

Karta Idealnog Grada smještena je u koordinatni sustav tako da ulice čine cjelobrojnu mrežu te se one sijeku u točkama čije su koordinate uređeni parovi cijelih brojeva. Promotrimo, za početak, samo takve točke, nazovimo ih t -točke.

Želimo li doći s jednog mjesta na drugo, uz uvjet da prijeđemo što manju udaljenost, najkraća udaljenost tada neće biti duljina ravne crte. Naime, zračna udaljenost bila bi duljina ravne crte i računala bi se formulom za udaljenost dviju točaka u euklidskoj geometriji, ali ljudi ne mogu letjeti, pa je ponekada potrebno udaljenost računati na drukčiji način. Udaljenost u taksi-geometriji između dviju t -točaka, $d_t(A, B)$, računamo kao najmanji broj horizontalnih i vertikalnih jediničnih dužina između tih točaka, odnosno najmanji broj jediničnih koraka koje moramo napraviti da od jedne točke dođemo do druge točke uz uvjet da nas svaki korak približava drugoj točki.

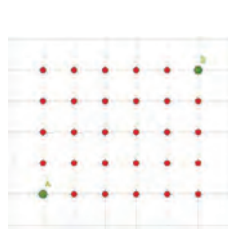
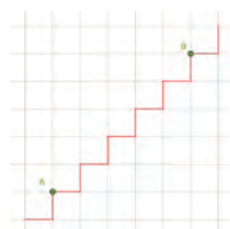
Kad bismo djetetu željeli objasniti što je to dužina, jedan od načina na koji to možemo učiniti je da mu kažemo da je dužina određena točkama A i B skup točaka koje čine najkraći put između tih točaka. Kad bismo se kretali npr. zrakoplovom iznad Idealnog Grada, onda bi najkraći put upravo bio "prava", euklidska dužina. Međutim, krećemo li se taksijem ulicama Idealnog Grada, dužine, nazovimo ih t -dužine, upravo su najkraći putovi koje smo prebrojavali. Primijetimo, najkraći put u taksi-

-geometriji nije jedinstven pa onda nisu ni t -dužine. Broj t -dužina jednak je $\binom{d_t(A,B)}{h}$, gdje je h broj horizontalnih koraka koje je potrebno napraviti u svakom najkraćem putu.

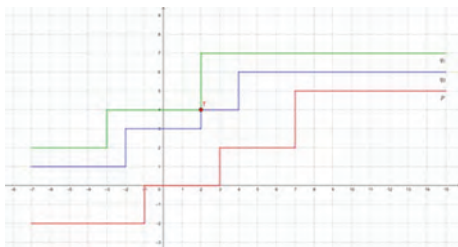
Slika 2. Neke t -dužine određene točkama A i B Slika 3. Euklidska dužina određena točkama A i B

Uočimo da neka t -točka C koja pripada t -dužini određenoj sa A i B jest između t -točaka A i B jer je $d_t(A, C) + d_t(C, B) = d_t(A, B)$. Međutim, ne pripadaju sve t -točke koje su između A i B istoj t -dužini. Skup svih t -točaka koje su između A i B sadrži sve točke koje pripadaju t -dužinama određenima točkama A i B . Grafički, sve t -točke koje su između A i B možemo predstaviti pravokutnikom kojemu su A i B nasuprotni vrhovi.

Sličnim načinom promišljanja zaključujemo da je pravac upravo takav skup točaka za koji vrijedi da je za svake dvije točke tog pravca najkraći put sadržan na tom pravcu.

Slika 4. Točke između točaka A i B Slika 5. t -pravac

Uočimo, t -pravac koji sadrži t -točke A i B nije jedinstven, već postoji beskonačno mnogo t -pravaca koji sadrže A i B te dva t -pravca mogu imati 0, konačno mnogo ili beskonačno mnogo zajedničkih točaka. U taksi-geometriji ne vrijedi aksiom o paralelama: "Neka je p pravac i T točka koja mu ne pripada. Tada postoji točno jedan pravac q koji sadrži točku T i ne siječe pravac p ."



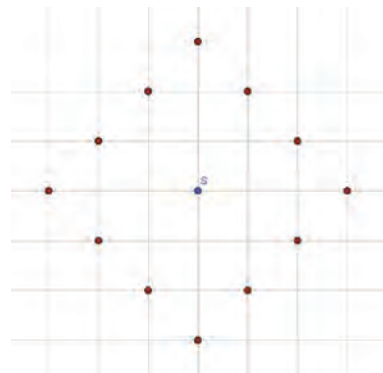
Slika 6. Paralelni t-pravci

Na slici 6 prikazan je t -pravac p i t -točka T u taksigeometriji te dva t -pravca q_1 i q_2 koja s t -pravcem p nemaju zajedničkih točaka. Uočimo kako su na slici nacrtani samo dijelovi pravaca. Dok u euklidskoj ravnini sasvim jasno iz slične slike možemo zaključiti sijeku li se neka dva pravca ili ne, u taksiravnini to nije tako. Međutim, dodamo li uz sliku i dodatne opise t -pravaca, bit će jasno da se pravci ne sijeku.

- p je t -pravac za koji vrijedi: ako je $x > 7$, onda je $y = 5$ i ako je $x < -1$, onda je $y = -2$
- q_1 je t -pravac za koji vrijedi: ako je $x > 2$, onda je $y = 7$ i ako je $x < -3$, onda je $y = 2$
- q_2 je t -pravac za koji vrijedi: ako je $x > 4$, onda je $y = 6$ i ako je $x < -2$, onda je $y = 1$.

Istaknimo ukratko značaj aksioma o paralelama. On je (odnosno, njemu ekvivalentna tvrdnja) obilježio povijest matematike. Aksiomatsko zasnivanje geometrije, koju danas zovemo euklidska geometrija, započelo je oko 300. godine prije nove ere kada je jedan od najvećih matematičara svih vremena – Euklid napisao *Elemente*, a završilo je 1899. kada je matematičar Hilbert uveo potpuni sustav aksioma euklidske ravninske geometrije. Posljedica otkrića hiperboličke geometrije, koji je 1826. objavio ruski matematičar Lobočevski, jest činjenica da je aksiom o paralelama uistinu aksiom te je on sadržan u skupu aksioma euklidske ravninske geometrije. Sve geometrije u kojima aksiom o paralelama ne vrijedi, nazivamo neeuklidskim geometrijama. Više detalja o povijesti geometrije i otkriću neeuklidskih geometrija nalazi se u [4].

Zanimljivo je promotriti i što bi bila t -kružnica, odnosno skup svih točaka taksiravnine koje su jednako udaljene od neke čvrste točke (središta).



Slika 7. Istaknute točke čine t -kružnicu sa središtem S i polumjerom 3

Oblik t -kružnice uvelike pomaže da se bolje organizira naš Idealni Grad, odnosno, razmišljamo li o primjeni u svakodnevnom životu, da se bolje organiziraju npr. policijske patrole, hitne medicinske službe, poštanske usluge, komunalna infrastruktura itd.

Iako je za taksista u Idealnom Gradu ovo sasvim dovoljno matematike za snalaženje i uspješno obavljanje posla, za nas matematičare priča ovdje ne završava, nego ona tek počinje.

Taksi-geometrija kao metrička geometrija

Uočimo da smo t -udaljenost između točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ mogli izračunati i koristeći se formulom:

$$d_t(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Istom formulom možemo računati t -udaljenost između bilo kojih dviju točaka u koordinatnom sustavu, odnosno bilo kojih dviju točaka čije su koordinate uređeni parovi realnih brojeva. Funkcija d_t je metrika, odnosno funkcija udaljenosti jer zadovoljava aksiome metrike:

1. $d_t(A, B) \geq 0$, za svake dvije točke A i B
2. $d_t(A, B) = 0$ ako i samo ako su A i B iste točke
3. $d_t(A, B) = d_t(B, A)$

4. $d_t(A, C) \leq d_t(A, B) + d_t(B, C)$, za svake tri točke A, B i C .

Promotrimo sada skup P , skup točaka, odnosno uređenih parova realnih brojeva i skup L , skup pravaca u koordinatnom sustavu. Na svakom pravcu p iz skupa L možemo definirati koordinatni sustav, odnosno funkciju f_p sa p u skup realnih brojeva i to na sljedeći način:

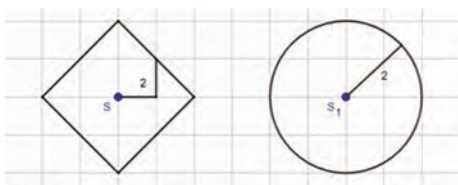
- ako je pravac p zadan jednadžbom $x = a$, onda je $f_p(x, y) = y$
- ako je pravac p zadan jednadžbom $y = ax + b$, onda je $f_p(x, y) = (1 + |a|)x$.

Lako se pokaže da je f bijekcija te da za svake dvije točke A i B proizvoljnog pravca p iz L vrijedi:

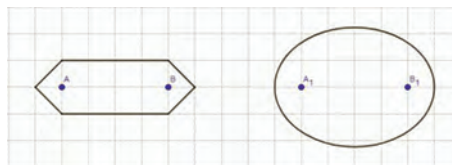
$$|f_p(A) - f_p(B)| = d_t(A, B).$$

Iz svega navedenog slijedi da je $\{P, L, d_t\}$ metrička geometrija koju zovemo taksi-ravnina. Sad imamo sve što je potrebno da u taksi-ravnini definiramo relaciju između te dužine, kutove, likove itd.

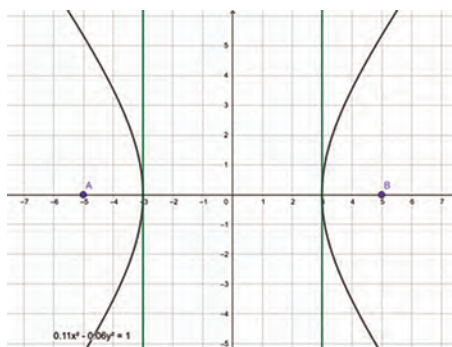
U aksiomatskom zasnivanju euklidske geometrije dužinu određenu točkama A i B definiramo kao skup točaka koje su između točaka A i B . U taksi-geometriji točke koje su između A i B pripadaju jednom od najkraćih putova između A i B (to su sve točke C takve da je $d_t(A, C) + d_t(C, B) = d_t(A, B)$) te sve te točke zajedno čine pravokutnik. Stoga je u taksi-geometriji točka C između točaka A i B ako sve tri točke pripadaju istom pravcu i ako vrijedi $d_t(A, C) + d_t(C, B) = d_t(A, B)$ te je dužina određena točkama A i B skup svih točaka između A i B . Uz takvu će definiciju dužine slike mnogo-kuta biti iste kao u euklidskoj ravnini. No, krivulje drugog reda izgledat će nešto drukčije.



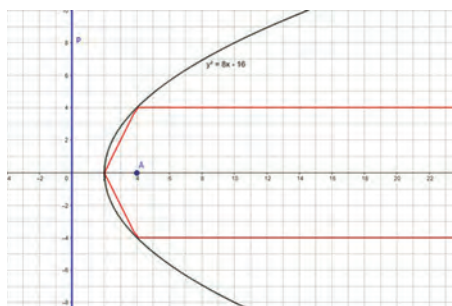
Slika 8. Na lijevoj je slici nacrtana kružnica sa središtem S i polumjerom 2 u taksi-ravnini, tj. nacrtan je skup točaka T ravnine za koji vrijedi $d_t(S, T) = 2$, a na desnoj slici je nacrtana kružnica sa središtem S_1 i polumjerom 2, ali u euklidskoj ravnini.



Slika 9. Na lijevoj slici nacrtana je elipsa s fokusima A i B u taksi-ravnini, tj. nacrtan je skup točaka T ravnine za koje je zbroj udaljenosti do fokusa jednak 6, a na desnoj slici nacrtana je elipsa s fokusima A_1, B_1 i velikom osi duljine 6, ali u euklidskoj ravnini.

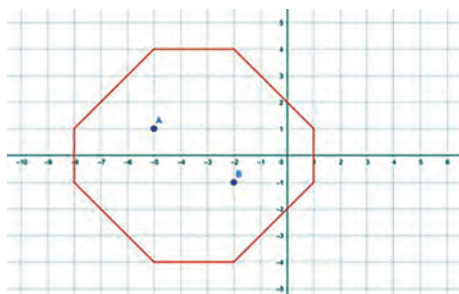


Slika 10. Zelenom bojom nacrtana je hiperbola u taksi-ravnini, tj. nacrtan je skup točaka za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti do žarišta A i B jednaka 6, a crnom bojom je nacrtana hiperbola sa žarištima A i B u euklidskoj ravnini

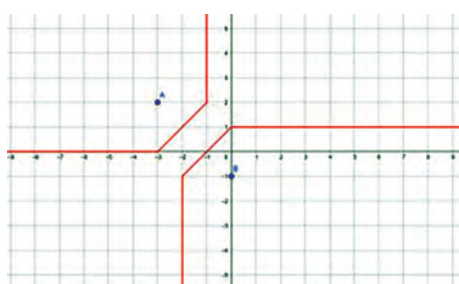


Slika 11. Crvenom bojom nacrtana je parabola u taksi-ravnini, tj. nacrtan je skup točaka koje su jednako udaljene od zadane točke F i zadanog pravca p , a crnom bojom nacrtana je parabola sa žarištem A i ravnicom p , ali u euklidskoj ravnini

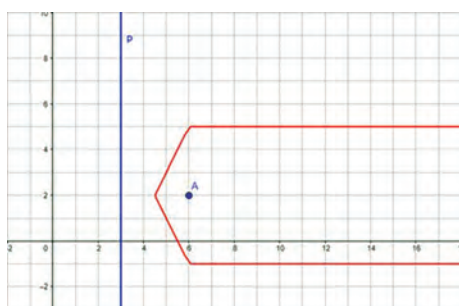
Na prethodnim smo slikama (slika 9, slika 10 i slika 11) prikazali krivulje čije osi su koordinatne osi. Međutim, u taksi-geometriji izgled krivulja ovisi o položaju osi krivulje. Na slikama 12, 13 i 14 prikazane su neke krivulje drugog reda kojima osi nisu koordinatne osi.



Slika 12. Elipsa s fokusima A i B i velikom osi duljine 11



Slika 13. Hiperbola s fokusima A i B i velikom osi duljine 2



Slika 14. Parabola

Uočimo i sljedeće: geometrijsko mjesto točaka kružnice, elipse i hiperbole određujemo s pomoću formule za udaljenost dviju točaka. Međutim, geometrijsko mjesto točaka parabole određujemo s pomoću formule za udaljenost između dviju točaka te formule za udaljenost točke od pravca. Udaljenost točke T od pravca p najmanji je element skupa koji sadrži udaljenosti svake točke pravca p i točke T . Odrediti udaljenost točke od pravca u taksi-geometriji nije uvijek jednostavno.

Zaključak

Taksi-geometrija vrlo je zanimljiv dio matematike. Proučavanje taksi-geometrije omogućuje nam bolje razumijevanje osnovnih geometrijskih koncepta kao i aksiomatskog zasnivanja geometrije. Taksi-geometrija primjer je geometrije koja je primjenjiva u svakodnevnom životu te nam može pomoći u boljem planiranju svakodnevnih aktivnosti.

Nadalje, tema ne zahtijeva veliko matematičko predznanje te se kao takva može, uz pažljivo osmišljene aktivnosti, uvesti i učenicima srednje, čak i osnovne škole. Nekoliko zanimljivih zadataka (s rješenjima) nalazi se u [6], dok [3] sadrži veliki broj zadataka kojima je omogućeno postupno i sustavno uvođenje taksi-geometrije učenicima.

U [5] je opisano iskustvo osmišljavanja i realizacije matematičke izložbe Taxi-geometrija u kojoj su izrađene umjetničke vizualizacije geometrijskih objekata u taksi-geometriji.

LITERATURA

- 1/ B. Divjak (2000.): *Notes on Taxicab Geometry*, KoG 5, 5–9.
- 2/ M. Gardner (1997.): *The Last Recreations: Hydras, Eggs, and Other Mathematical Mystifications*, Springer.
- 3/ E. Krause (1986.): *TAXICAB GEOMETRY An Adventure in Non-Euclidean Geometry*, Dover Publications, Inc., New York.
- 4/ Z. Kumik (2001.): 175 godina od otkrića neeuklidske geometrije, *Matematika i škola*, 8.
- 5/ V. Mikulić Crnković, D. Mlacović, M. Mrvoš (2022.): Kako organizirati matematičku izložbu – izložba Taxi geometrija, *Matematika i škola* 113.
- 6/ C. Reinhardt (2005.): Taxi Cab Geometry: History and Applications, *The Montana Mathematics Enthusiast*, TMME, Vol 2, br. 1, 38–64.