

Teorem o Eulerovu pravcu i njegova primjena

Šefket Arslanagić i
Daniela Zubović, Sarajevo



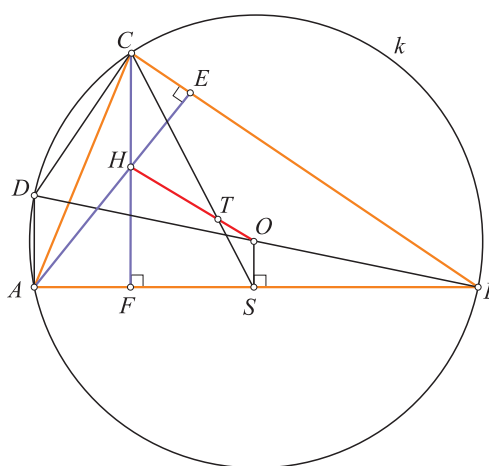
U ovom ćemo članku dokazati zanimljiv teorem o Eulerovu pravcu te dati jednu primjenu tog teorema koji glasi:

- Udaljenost ortocentra trokuta od jednog vrha dva je puta veća od udaljenosti središta opisane kružnice tog trokuta od stranice koja je suprotna tom vrhu.
- Ortocentar, težište i središte opisane kružnice trokuta pripadaju jednom pravcu koji se naziva Eulerov pravac.

Dokaz: a) Neka su točke H i O ortocentar i središte opisane kružnice k trokuta $\triangle ABC$, točke E i F nožišta visina AE i CF , a točka S polovište stranice $\overline{AB}$.

Produžimo $\overline{BO}$ do presjeka D s kružnicom k . S obzirom na to da je $\overline{BD}$ promjer kružnice k , kutovi $\angle BAD$ i $\angle BCD$ su pravi. U pravokutnom trokutu $\triangle BDA$ dužina $\overline{OS}$ je njegova srednjica, zbog čega je $|OS| = \frac{1}{2}|AD|$ i $OS \parallel AD$, a kako je četverokut $AHCD$ paralelogram ($AE \parallel DC$ i

$CF \parallel AD$) u kojem je $|HC| = |AD|$ i $HC \parallel AD$, bit će $|SO| = \frac{1}{2}|HC|$ i $SO \parallel HC$.



b) Spojimo H sa O , presjek težišnice $\overline{CS}$ s dužinom $\overline{HO}$ označimo sa T i uočimo trokute $\triangle TCH$ i $\triangle TSO$ koji su slični jer su im sukladni kutovi $\angle CTH$ i $\angle STO$ (vršni kutovi) te $\angle HCT$ i $\angle OST$ (kutovi uz težišnicu SC paralelnih pravaca FC i SO). Kako je prema prvom dijelu teorema $|HC| = 2|SO|$ (koeficijent sličnosti za spomenute trokute je 2), bit će $|CT| = 2|TS|$ na osnovu čega zaključujemo da je točka T težište trokuta $\triangle ABC$ i $|HT| = 2|TO|$.

Dakle, ortocentar H , težište T i središte O opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ pripadaju jednom pravcu (Eulerov pravac), pri čemu je udaljenost težišta od ortocentra dva puta veća od udaljenosti težišta od središta opisane kružnice.

Sad ćemo dokazati jednu zanimljivu nejednakost:

$$|OT|^2 \leq R(R - 2r), \quad (1)$$

gdje su R i r polumjeri opisane i upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$.

Dokaz. Koristit ćemo se poznatom formulom za udaljenost ortocentra H i središta opisane kružnice O trokuta $\triangle ABC$ koja glasi:

$$|OH|^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2), \quad (2)$$

gdje su a , b i c duljine stranica trokuta $\triangle ABC$.

Napomena 1. Dva različita dokaza formule (2), kao i dva različita dokaza formule:

$$|IO|^2 = R(R - 2r),$$

gdje je I središte upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ mogu se naći u [1] (str. 432–443).

Iz dokazanog teorema slijedi:

$$|OT| = \frac{1}{3}|OH|. \quad (3)$$

Sad iz (2) i (3) slijedi:

$$|OT|^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Nejednakost (1) koju trebamo dokazati sada glasi:

$$R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \leq R(R - 2r),$$

odnosno

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 18Rr. \quad (4)$$

Upotrijebimo li nejednakost između kvadratne i aritmetičke sredine ($K \geq A$) za tri pozitivna broja, imamo:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \geq \frac{a + b + c}{3}, \text{ tj.} \\ a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}s^2, \quad (5)$$

gdje je s poluopseg trokuta $\triangle ABC$.

Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine ($A \geq G$) za tri pozitivna broja imamo:

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc},$$

odnosno

$$(a + b + c)^3 \geq 27abc,$$

a zbog $a + b + c = 2s$ i $abc = 4RP = 4Rrs$ slijedi:

$$s^2 \geq \frac{27}{2}Rr. \quad (6)$$

Sad iz (5) i (6) dobivamo (4), odnosno (1). Jednakost u (1) vrijedi ako je $a = b = c$, tj. ako je u pitanju jednakostraničan trokut.

Iz nejednakosti $|OT|^2 \leq R(R - 2r)$ i jednakosti $|IO|^2 = R(R - 2r)$ slijedi nejednakost:

$$|OT|^2 \leq |IO|^2, \text{ tj.}$$

$$|OT| \leq |IO|. \quad (7)$$

Jednakost (7) vrijedi ako i samo ako je u pitanju jednakostranični trokut.

LITERATURA

- 1/ Š. Arslanagić (2005.): *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo.
- 2/ O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrović, P. M. Vasić (1969.): *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen (Netherlands).
- 3/ A. Marić (2007.): *Trokut*, Element, Zagreb.