

Tko je prvi... otkrio logaritme

Franka Miriam Brueckler, Zagreb

Kao što smo najavili u prošlom broju, u ovom posljednjem nastavku rubrike "Tko je prvi ...?" reći ćemo kako (i zašto) su na svijet došli logaritmi. Za to se moramo vratiti u doba renesanse, u vrijeme kada su europski istraživači i moreplovci oplovili čitav svijet. No, za snalaženje na pučini nisu imali na raspolaganju današnje GPS uređaje, već se određivanje pozicije broda kao i pravilnog smjera temeljilo na korištenju astronomskih instrumenata i zatim izračuna pozicija i smjerova koristeći se trigonometrijom, tj. trigonometrijskim tablicama i formulama. Pritom je često trebalo množiti i dijeliti višeznamenkaste brojeve, što je zbog nedostatka ikakvih kalkulatora boljih od abakusa bio mukotpan posao. Stoga se počela tražiti metoda kojom bi se množenje i dijeljenje brojeva svelo na lakše provedive operacije zbrajanja i oduzimanja.

Prva takva metoda u široj upotrebi bila je *prosthaphaeresis*, osmišljena krajem 16. st., a radilo se o korištenju formula za umnožak sinusa i kosinusa kojim se umnožak dvaju sinusa ili dvaju kosinusa mogao svesti na zbroj sinusa ili kosinusa od zbrojenih ili oduzetih kutova. No, ova metoda nije bila prikladna za pojednostavljivanje dijeljenja (a ni potenciranja).

Matematičari su nastavili tražiti prikladniju metodu, a pritom su uočili neke korisne rezultate iz ranijih vremena. Konkretno, u 14. stoljeću je francuski filozof, matematičar i biskup Nicole d'Oresme uočio da pravilo koje danas zapisujemo kao $a^x a^y = a^{x+y}$ vrijedi ne samo za prirodne eksponente (što je bilo poznato i prije njega), nego i za pozitivne razlomke. Na negativne brojeve i nulu kao eksponente to je pravilo u 15. stoljeću proširio d'Oresmeov imenjak i sunarodnjak Nicolas Chuquet. Pravilo je zatim u svom glavnom djelu *Arithmetica integra* (1544.) upotrijebio njemački protestantski redovnik i matematičar **Michael Stifel** (1487. – 1567.).



Gr. 44

Gr.	44	45	46	47	48	49	50
10	2000000	3162278	3981072	5011872	6309573	7943282	10000000
11	2596226	3981072	5011872	6309573	7943282	10000000	12589254
12	3162278	5011872	6309573	7943282	10000000	12589254	15848932
13	3981072	6309573	7943282	10000000	12589254	15848932	20000000
14	5011872	7943282	10000000	12589254	15848932	20000000	25962260
15	6309573	7943282	10000000	12589254	15848932	20000000	31622780
16	7943282	10000000	12589254	15848932	20000000	25962260	39810720
17	10000000	12589254	15848932	20000000	25962260	39810720	50118720
18	12589254	15848932	20000000	25962260	39810720	50118720	63095730
19	15848932	20000000	25962260	39810720	50118720	63095730	79432820
20	20000000	25962260	39810720	50118720	63095730	79432820	100000000
21	25962260	39810720	50118720	63095730	79432820	100000000	125892540
22	39810720	50118720	63095730	79432820	100000000	125892540	158489320
23	50118720	63095730	79432820	100000000	125892540	158489320	200000000
24	63095730	79432820	100000000	125892540	158489320	200000000	259622600
25	79432820	100000000	125892540	158489320	200000000	259622600	398107200
26	100000000	125892540	158489320	200000000	259622600	398107200	501187200
27	125892540	158489320	200000000	259622600	398107200	501187200	630957300
28	158489320	200000000	259622600	398107200	501187200	630957300	794328200
29	200000000	259622600	398107200	501187200	630957300	794328200	1000000000
30	259622600	398107200	501187200	630957300	794328200	1000000000	1258925400
31	398107200	501187200	630957300	794328200	1000000000	1258925400	1584893200
32	501187200	630957300	794328200	1000000000	1258925400	1584893200	2000000000
33	630957300	794328200	1000000000	1258925400	1584893200	2000000000	2596226000
34	794328200	1000000000	1258925400	1584893200	2000000000	2596226000	3981072000
35	1000000000	1258925400	1584893200	2000000000	2596226000	3981072000	5011872000
36	1258925400	1584893200	2000000000	2596226000	3981072000	5011872000	6309573000
37	1584893200	2000000000	2596226000	3981072000	5011872000	6309573000	7943282000
38	2000000000	2596226000	3981072000	5011872000	6309573000	7943282000	10000000000
39	2596226000	3981072000	5011872000	6309573000	7943282000	10000000000	12589254000
40	3981072000	5011872000	6309573000	7943282000	10000000000	12589254000	15848932000
41	5011872000	6309573000	7943282000	10000000000	12589254000	15848932000	20000000000
42	6309573000	7943282000	10000000000	12589254000	15848932000	20000000000	25962260000
43	7943282000	10000000000	12589254000	15848932000	20000000000	25962260000	39810720000
44	10000000000	12589254000	15848932000	20000000000	25962260000	39810720000	50118720000
45	12589254000	15848932000	20000000000	25962260000	39810720000	50118720000	63095730000
46	15848932000	20000000000	25962260000	39810720000	50118720000	63095730000	79432820000
47	20000000000	25962260000	39810720000	50118720000	63095730000	79432820000	100000000000
48	25962260000	39810720000	50118720000	63095730000	79432820000	100000000000	125892540000
49	39810720000	50118720000	63095730000	79432820000	100000000000	125892540000	158489320000
50	50118720000	63095730000	79432820000	100000000000	125892540000	158489320000	200000000000

Slika 1. Naslovnica i stranica iz prve tablice "logaritama" u povijesti, preuzeto s Wikipedije (public domain).

Tu je uočio i istaknuo: Zbrajanje u aritmetičkom nizu odgovara množenju u geometrijskom nizu, a isto tako oduzimanje u prvom odgovara dijeljenju u drugom. Taj se uočeni odnos odnosio na aritmetički niz prirodnih brojeva te geometrijski niz s kvocijentom 2:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & \dots \end{array}$$

Stifel je dakle primijetio da se primjerice $8 \cdot 16$ može izračunati tako da zbrojimo $3 + 4 = 7$ i u drugom redu očitamo rezultat. No, ako bismo tako htjeli pomnožiti primjerice 7 s 20 , zbog velikih raspona u drugom redu (brzog rasta geometrijskog niza s kvocijentom 2), teško bi bilo procijeniti koje bi brojeve trebalo uzeti u prvom redu (teško bi bilo procijeniti ono što danas zovemo $\log_2 7$ i $\log_2 20$). Da bi se smanjili razmaci i time procjene međuvrijednosti učinile pouzdanijima, prikladniji bi bio kvocijent geometrijskog niza bliži 1. To je shvatio i iskoristio škotski aristokrat i hobi-matematičar **John Napier**,

Laird of Merchiston (1550. – 1617.). On je 20 godina života potrošio na konstrukciju prve tablice logaritama u povijesti (slika 1), koju je objavio 1614. s naslovom *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*¹. Iz naslova vidimo da je već on sam brojevima u svojoj tablici dao naziv logaritam, koji je izveo iz grčkih riječi *logos* i *arithmos*. Napier je konstruirao svoju tablicu “logaritama sinusa” (jer joj je namjena bila olakšati računanje sa sinusima) rabeći tad najtočnije tablice sinusa. U njegovo doba, iako je upravo Napier uveo decimalnu točku i iako su decimalni razlomci postali poznati u Europi tri-desetak godina ranije², sinusi u tablicama su bili cijeli brojevi – računali su se koristeći kružnice različitih polumjera. Tada najtočnije tablice, točne na 7 značajnih znamenki, bile su izračunane s obzirom na kružnicu polumjera 10^7 . U njima je, primjerice, sinus od 30° bio naveden kao 5 000 000. To je razlog da je u svojoj konstrukciji Napier krenuo od geometrijskog niza s kvocijentom $1 - 10^{-7}$. Iz tog je niza konstruirao drugi pa treći i tako dobio tablicu koja je sadržavala 1380 brojeva (sinusa) u rasponu od 4 998 609.4034 (sinus kuta 29.99°) do 10 000 000 (sinus pravog kuta). No, (ne jedini) problem s tom tablicom je bio taj da se nije radilo o jednom geometrijskom nizu, već o umnošku dvaju geometrijskih nizova.



Slika 2. Napierova definicija logaritma: $\text{NapLog } x = y$.

Sad se iskazala Napierova genijalnost – on je “okrenuo stvar”. Umjesto da traži cjelobrojne eksponente (mi bismo rekli logaritme) za decimalne sinuse, Napier je odlučio uzeti cjelobrojne sinuse i tražiti odgovarajuće eksponente. U tu svrhu osmislio je sljedeće objašnjenje što bi to bio logaritam: Dvije čestice gibaju se pravocrtno, krećući u istom početnom trenutku. Prva čestica, *A*, giba se jednoliko, s konstantnom brzinom 10^7 i bilježimo njezine pozicije u različitim trenucima (označit ćemo ih ovdje moderno s $y(t)$). Druga čestica, *G*, giba se prema točki na udaljenosti 10^7 od početne točke, početna brzina joj je također 10^7 , ali je u svakom trenutku njezina brzina razmjerna udaljenosti $x(t)$

do cilja (slika 2). Napier definira: u bilo kojem trenutku je položaj prve čestice logaritam udaljenosti druge čestice do cilja u istom trenutku.

Ako taj Napierov logaritam označimo s NapLog , vidimo kako je Napier definirao da je

$$y(t) = \text{NapLog } x(t).$$

Kako bi izračunao tablicu vrijednosti svog logaritma, Napier je dokazao razna njegova svojstva. Među ostalim, uočio je da za jednake vremenske razmake (za $t = 0, 1, 2, \dots$) pozicije prve čestice čine aritmetički niz, a udaljenosti druge do cilja geometrijski. Mi to danas možemo lako provjeriti koristeći se infinitezimalnim računom, koji Napier još nije imao na raspolaganju. Za česticu *A* je brzina u trenutku t s jedne strane $\dot{y}(t)$, a s druge uvijek 10^7 , dakle $\dot{y}(t) = 10^7$ pa je $y(t) = 10^7 t + C$. Početni uvjet $y(0) = 0$ daje $C = 0$, tj. $y(t) = 10^7 t$. Za česticu *G* brzina je u trenutku t s jedne strane derivacija prijedene udaljenosti, dakle derivacija od $10^7 - x(t)$, odnosno $-\dot{x}(t)$, a s druge strane je to $kx(t)$ za neku konstantu proporcionalnosti k . Dakle $-\dot{x}(t) = kx(t)$. Tu diferencijalnu jednadžbu lako riješimo metodom separacije varijabli i dobijemo $x(t) = C \exp(-kt)$. U početnom trenutku su i brzina i udaljenost koju još treba prijeći 10^7 , pa je $C = 10^7$ i $k = 1$. Dakle, $x(t) = 10^7 \exp(-t)$, odnosno $t = \ln(10^7/x)$. Stoga je $\text{NapLog } x(t) = y(t) = 10^7 \ln(10^7/x)$. Kao što vidimo, Napierov logaritam još nije logaritam u modernom smislu riječi. Među ostalim, nul-točka mu je 10^7 , a i ona svojstva koja su bila cilj konstrukcije ne vrijede baš točno, naime $\text{NapLog}(10^7 ab) = \text{NapLog}(10^7 a) + \text{NapLog}(10^7 b)$ i $\text{NapLog}(10^7 a/b) = \text{NapLog}(10^7 a) - \text{NapLog}(10^7 b)$. Za Napierovu konstrukciju tablice logaritama saznao je **Henry Briggs** (1561. – 1631.), profesor geometrije u Oxfordu. Briggs je 1615. otputovao u Edinburgh da se susretne s Napierom, te su se tom prilikom složili da bi puno zgodniji bili logaritmi kojima je nul-točka 1 i kojima bi povećanje argumenta za faktor 10 vrijednost rasla za 1, jer bi se tad i tablicom lakše koristili i stvarno bi logaritam umnoška odnosno količnika bio zbroj odnosno razlika logaritama. Drugim riječima, složili su se da su bitno prikladniji logaritmi koje danas nazivamo dekadskim, a

¹ Posthumno je objavljena ista tablica skupa s pratećom teorijom: *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (1619.).

² U Europu je decimalne razlomke uveo Simon Stevin 1585. u svojoj knjižici *De Thiende*.

