

Malo torte za vas...

Tatjana Štambuk, Karlovac

Torta se obično povezuje sa svečanim i veselim trenucima u životu. Bilo bi lijepo ispeći tortu bez nekog povoda i odnijeti koji komad torte susjedima, prijateljima, baki, djedu... Malo ih iznenaditi i razveseliti. Tortu obično pečemo u okruglim kalupima, a režemo na jednake kružne isječke. Komade torte treba staviti u posudu koja je dovoljno velika. Možda nađemo kakvu manju posudu, ali pametnim slaganjem uspijemo smjestiti sve komade. Evo ideje za projektni zadatak!



U Ekonomsko-turističkoj školi u Karlovcu učenici često rade prezentacije ili projektne zadatke iz strukovnih predmeta. Do sada nisam učenicima ponudila sudjelovanje na projektu iz matematike. Možda je razlog tomu što matematika većini učenika nije omiljen predmet. Često se mučimo s ostvarivanjem ishoda, pa za ostale aktivnosti ostane malo vremena. Prošle sam godine ipak odlučila ponuditi učenicima rad na projektu.

Prema kurikulumu se učenici s trigonometrijom susreću već u prvom razredu. Tada rade trigonometriju pravokutnog trokuta. U drugom se razredu trigonometrijske funkcije primjenjuju u proizvoljnom trokutu. U trećem se razredu proučavaju trigonometrijske funkcije i njihova svojstva. Projektom sam željela povezati gradivo svih triju razreda, ponoviti sadržaje koje smo možda u nastavi na daljinu površno obradili. Mnogih sadržaja koje smo obradili na taj način učenici se uopće ne sjećaju.

Željela sam trigonometriju povezati sa svakodnevnim životom, pripremajući im zadatke koji nisu suhoparni. Ideja za zadatke došla je dok sam rezala

komade torte i slagala ih u plastičnu kutiju. Vjerujem da je i učenička motivacija veća ako gradivo povežemo s nekom situacijom iz života.

Rad na projektu ponudila sam svojim učenicima prvih, drugih i trećih razreda. Nažalost, maturantima nisam predavala. Bilo bi zanimljivo vidjeti koliko je trigonometrije usvojeno nakon četiri godine. Za rad na projektu javilo se šest grupa, tri iz drugih i tri iz trećih razreda.

Upoznavanje s pravilima

Na satu smo razgovarali o pravilima vezanima za projekt. Dogovorili smo se da grupe budu po dvoje ili troje učenika. Mislim da je teže komunicirati i surađivati kada je više od troje učenika.

U 110. broju MIŠ-a mogli smo čitati o zadacima više i niže kognitivne razine (članak Ljerke Jukić Matić i Jasmine Alilović). U ovome sam projektu učenicima ponudila zadatke različitih kognitivnih

razina. Učenicima je često teško procijeniti težinu zadatka, pa sam sama procijenila i označila razinu zadatka. Na taj su način učenici slabijih sposobnosti mogli odabrati zadatke niže kognitivne razine. Budući da učenici često kažu kako ne razumiju zadatak te brzo odustaju, rješavanjem lakših zadataka doživljavaju uspjeh i dobivaju motivaciju za daljnji rad.

Zadatci označeni jednom zvjezdicom su najlakši. U njima nema računanja, nego treba samo nacrtati neka moguća rješenja problema. Zadatak s dvije zvjezdice traži i ilustraciju i račun. Zadatci označeni s tri zvjezdice su najsloženiji. U njima učenik treba povezati više elemenata sa skice i iskoristiti ih u strategiji rješavanja problema. Upozorila sam učenike da moraju biti uporni jer ideja kako riješiti zadatak možda neće doći danima. Svima sam ponudila pomoć oko jednog zadatka, to sam nazvala "Joker zovi". Ponekad je potrebno samo malo pogurati učenike da ipak uspiju riješiti problem. Dogovorili smo se da rok za izradu projekta bude 10 dana.

Učenike sam upozorila da organiziraju svoj rad tako da svatko može dati svoj doprinos. Na satu će prezentirati svoje radove tako da s razredom ostvare što bolji kontakt. Učenici u razredu ne smiju ostati samo promatrači, nego ih pitanjima treba voditi prema rješenju zadataka. Učenici tijekom svog školovanja imaju nekoliko predmeta u kojima uče

o komunikaciji, pa sam htjela vidjeti kako će svoja znanja iz tih predmeta primijeniti u matematičkom kontekstu.

S načinom vrednovanja treba učenike upoznati prije rada, kako bi znali što se od njih očekuje. U vrednovanje možemo uključiti ostale učenike. Oni mogu postavljati pitanja prilikom prezentacija rješenja te ih kasnije ocijeniti u anonimnoj anketi. U anketu možemo staviti i pitanja o pokazanim komunikacijskim vještinama, pogotovo ako učenici imaju predmete u kojima se one uče. S učenicima sam prošla rubriku za vrednovanje. Rubrika određuje na što sve moraju paziti pri izradi projekta, a svaka je sastavnica opisana na tri razine (tablica 1).

Većina učenika nije nikada prije vidjela rubriku za vrednovanje, pa sam im pokušala objasniti čemu ona služi i zašto je korisna. Zajedno smo prošli kroz kriterije rubrike. Učenike je zanimalo kakvi moraju biti crteži, moraju li crtati na računalu ili rukom. Skice koje će poslati uz rješenje zadataka moraju kod kuće napraviti geometrijskim priborom. Rekla sam im da ne očekujem crteže na računalu. Skica kojom će se koristiti na prezentaciji u razredu može biti nacrtana kredom na ploči. Popunjavat će ju novim elementima kako napreduju kroz zadatak. Da bi dobro prezentirali rješenje zadatka i uključili druge učenike, važno je da skica bude jasna i precizna. U razgovoru s razredom treba objasniti sve elemente skice. Svaku tvrdnju treba objasniti. Zašto su neki

			
Odabir zadatka	Jedan lagan, a ostali srednje težine.	Svi zadatci srednje težine.	Barem jedan zadatak najveće težine.
Crtež	Rješenje zadatka je neprecizno i neuredno.	Rješenje zadatka je nacrtano ravnalom i šestarom ili rezanjem oblika iz papira.	Zadatak ilustriran preciznim crtežom sa svim oznakama ili konstruiran.
Račun	Lakši zadatci nisu riješeni točno, napravljene su velike pogreške unatoč pomoći. Rješenja nisu provjeravana.	Lakši zadatci su riješeni bez grešaka. Teži zadatci su riješeni uz malu pomoć. Rješenja su provjeravana.	Teži zadatci su riješeni točno, bez pomoći i na više načina. Rješenja su provjeravana na više načina.
Izlaganje	Učenik ne zna objasniti rješenje zadatka. Ne zna odgovoriti na pitanja.	Učenik nesigurno objašnjava rješenje zadatka. Nesigurno odgovara na pitanja.	Učenik sigurno objašnjava rješenje zadatka i odgovara na pitanja.

Tablica 1.

kutovi sukladni, kojom ćemo se trigonometrijskom funkcijom koristiti, zašto je kut pravi... Na takva i slična pitanja trebaju odgovoriti učenici iz publike, a to će moći samo ako je skica jasna i precizna.

Zadatci

1. zadatak *

Marko je ispekao tortu promjera 26 cm i razrezao ju na 16 jednakih komada. Uzeo je kutiju u obliku kvadra čije dno ima oblik pravokutnika duljine 14 cm i širine 12 cm. Želi u kutiju staviti 4 komada torte. Prikaži barem dva načina kako to može učiniti.

Samo je jedna grupa odabrala ovaj zadatak. Zadatak zahtijeva samo malo kombiniranja i osjećaja za prostor. Rješenja se mogu napraviti s pomoću kolaž-papira.

Učenici se nisu dosjetili načina na slici 1.



Slika 1.

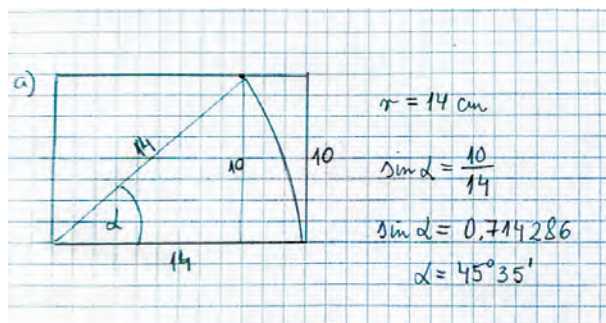
2. zadatak

Baka je ispekla tortu promjera 28 cm. Ima plastičnu kutiju u obliku kvadra čije je dno u obliku pravokutnika širine 10 cm i duljine 14 cm. Želi u kutiju staviti jedan, ali što veći komad torte.

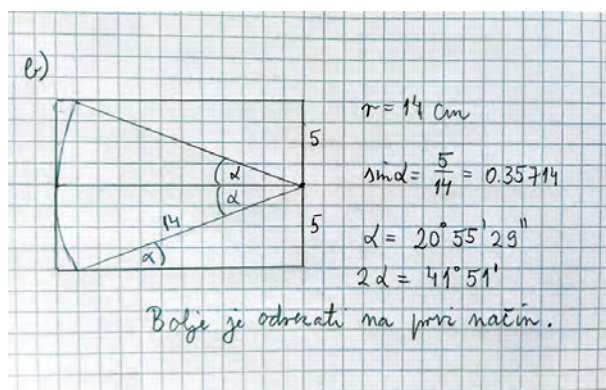
* Opiši barem dva načina na koja to baka može napraviti. Usporedi ih i pokaži koji je bolji. Svoja razmišljanja ilustriraj.

** Opiši barem dva načina na koja to baka može napraviti. Usporedi ih i dokaži koji je bolji. Svoja razmišljanja i račune ilustriraj crtežima.

Dvije su grupe odabrale ovaj zadatak. Obje su nacrtale iste slučajeve, prikazane na slikama 2 i 3.



Slika 2.



Slika 3.

3. zadatak *

Marija, Fran i Sanja ispekli su tortu promjera 26 cm. Imaju dvije plastične kutije čije dno ima oblik pravokutnika duljine 12 cm i širine 15 cm. Marija i Fran će odrezati dva jednaka komada torte i staviti u kutiju da ponese kući. Marija je odrezala dva komada i složila kao na slici 4., a Fran kao na slici 5.



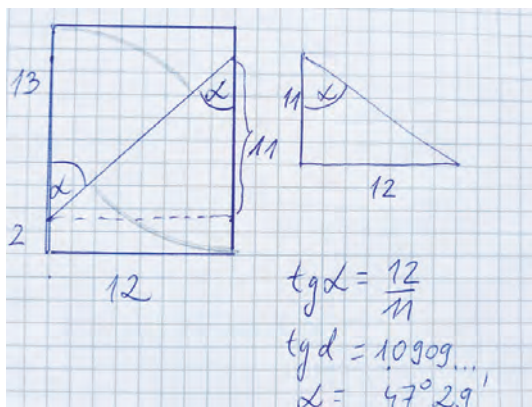
Slika 4.



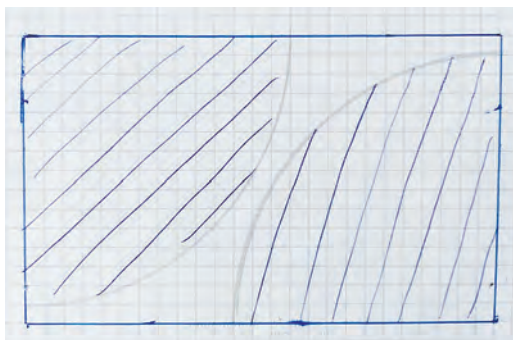
Slika 5.

Tko je uzeo više torte? Jesu li mogli smjestiti veće komade? Na koji način? Svoja razmišljanja i račune ilustriraj.

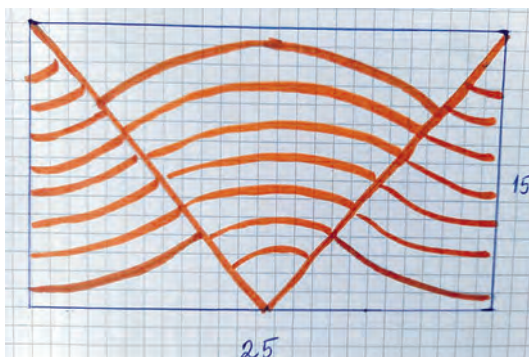
Ovaj zadatak odabrala je jedna grupa učenika. Uz primjenu trigonometrijskih funkcija lako su došli do rješenja. Uspješno su našli kako se može staviti više torte (slika 6).



Slika 6.



Slika 7.



Slika 8.

4. zadatak *

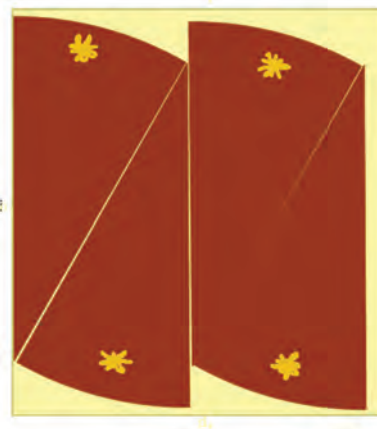
Ivo ima plastičnu kutiju u obliku kvadra, čije je dno pravokutnik duljine 25 cm i širine 15 cm. Želi u nju staviti što više torte promjera 28 cm.

Kako Ivo može rezati i složiti komade torte? Svoja razmišljanja ilustriraj crtežima.

Ovaj zadatak je otvorenog tipa i ne traži računanje, već samo malo kombiniranja i osjećaja za prostor. Samo je jedna grupa odabrala ovaj zadatak, vjerojatno zato što je označen jednom zvjezdicom. Rješenja su na slikama 7 i 8.

5. zadatak **

Baka je ispekla tortu promjera 24 cm. Tortu je razrezala na 12 jednakih komada. Prva je dva komada stavila tako da je spojila bočne strane komada, a zatim druga dva na isti način (slika 9). Koliko bi trebale biti duge stranice dna kutije pravokutnog oblika da stanu 4 komada torte?



Slika 9.

Dvije su grupe učenika odabrala i riješile ovaj zadatak. Učenici su bez problema primijenili trigonometrijske funkcije i izračunali duljine stranica: 12 cm i 13.61 cm. Dok su prezentirali ovaj zadatak, učenici jedne grupe crtali su male i nejasne skice. Upozorila sam ih da skica mora biti veća kako bi ostali učenici mogli razumjeti postupak.

6. zadatak

Ana je izrezala komad torte pod kutom od 80° . Promjer torte je 26 cm.

Može li staviti taj komad u kutiju čije je dno pravokutnik duljina stranica 12 cm i 13 cm? Kako može razrezati taj komad na dva dijela i staviti ih u kutiju?

* Svoje tvrdnje objasni i ilustriraj.

** Svoje tvrdnje dokaži računom i ilustriraj.



Slika 10.

Ovaj su zadatak rješavale dvije grupe. Zadatak je vrlo jednostavan, učenici su primjenom trigonometrijskih funkcija odredili visinu komada torte i vidjeli da je veća od 12 cm te da komad neće stati u kutiju. Također su pokazali da rezanjem na dva jednaka dijela može stati u kutiju.

7. zadatak **

Ivana je ispekla tortu promjera 26 cm i razrezala ju na 12 jednakih komada. Nakon par dana su ostala samo tri komada pa ih je prebacila u kutiju i složila kao na slici 11. Koliko moraju biti duge stranice dna kutije da u nju stanu komadi torte?



Slika 11.

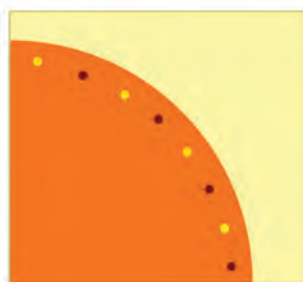
Samo je jedna grupa odabrala ovaj zadatak, ali su tražili pomoć. Nisu napravili dobru skicu ali su uz pomoć ipak riješili zadatak. Rješenje se lako dobije s pomoću trigonometrije pravokutnog trokuta. Minimalne duljine stranica su 14.74 cm i 13.46 cm.

8. zadatak

Ana i Maja ispekle su tortu i odlučile dio odnijeti prijateljima. Uzele su kutiju čija je baza pravokutnik duljine 16 cm i širine 14 cm. Ana je odrezala $1/4$ torte i stavila ga u kutiju kao na slici. Maja je primijetila da se u kutiju može staviti još torte. Promjer torte je 24 cm. Kako može odrezati i staviti još jedan komad torte u kutiju?

* Prikaži barem dva načina i usporedi ih.

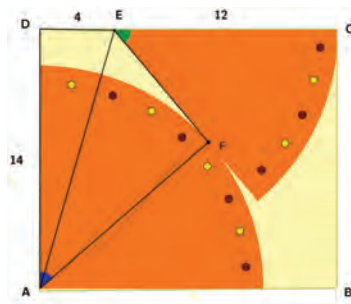
*** Prikaži i usporedi barem dva načina. Svoja razmišljanja dokaži računom i ilustriraj.



Slika 12.

Samo je jedna grupa pokazala interes za ovaj zadatak. Iako sam im pokušala pomoći, brzo su odustali od njegovog rješavanja.

U tom smo razredu ipak došli do rješenja. Na kraju prezentacije zajedno smo nacrtali skicu, a učenici su predlagali kao bi stavili drugi komad torte. Većina je učenika uočila da je najbolje staviti drugi komad kao na slici 13.

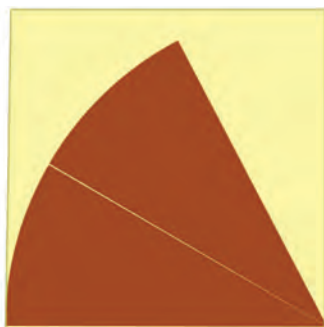


Slika 13.

Trebalo je malo više vremena dok nisu uočili i dokazali da su $\angle FAD$ i $\angle FEC$ sukladni kutovi. Nakon što sam spojila točke A i E , upitala sam ih što sada vide. Većina je bila zbunjena, ali jedna je učenica odgovorila: *Dva pravokutna trokuta*. Nakon toga više nije bilo problema. Mjeru kuta $\angle FAD$ dobili smo kao zbroj mjera kutova $\angle FAE$ i $\angle EAD$, uz pomoć Pitagorina poučka i trigonometrijskih funkcija.

9. zadatak *

Snježana je uzela kutiju čije dno ima oblik kvadrata stranice 15 cm i stavila u njega dva komada torte kao na slici 14. Prvi je komad odrezala pod kutom 30° , ali drugi pod kutom 32° . Shvatila je da treći komad, koji je odrezala pod kutom 30° , neće stati u kutiju. Što treba napraviti da treći komad stane u kutiju, a da prvi komad ne dira?



Slika 14.

Tri su grupe učenika riješile ovaj zadatak. Svi su odgovorili da drugi komad treba pomaknuti do ruba kutije. Zapravo ga ne treba pomaknuti do samog ruba. Osim toga, drugi komad torte može se pomaknuti na više načina. Na satu smo komentirali



Slika 15.

zadatak i napravili skice. Moglo bi se izračunati za koliko se najmanje mora pomaknuti drugi komad kako bi stao treći.

Jedan način prikazan je na slici 15.

Treba samo uočiti trokut koji određuju sva tri komada torte. Nakon računanja kutova trokuta, primjenom poučka o sinusima učenici su izračunali da je pomak dug 0.99 cm.

10. zadatak **

Sanja je napravila čokoladnu tortu promjera 26 cm. Odlučila je odnijeti 2 komada djeđu i baki. Našla je plastičnu posudu čije dno ima oblik pravokutnika duljine 8 cm i širine 13 cm. Stavila je dva jednaka komada u kutiju kao na slici 16. Pod kojim je kutom rezala komade torte? Svoje tvrdnje ilustriraj i dokaži računom.



Slika 16.

Dvije su grupe odabrale ovaj zadatak. Kut se lako izračuna primjenom funkcije tangens, $\alpha = 31^\circ 36'$.

11. zadatak ***

Baka je ispekla tortu promjera 28 cm. Tortu je razrezala na 12 jednakih komada. Dva je komada spojila kao na slici 17. Hoće li ovako složeni komadi torte stati u okruglu posudu promjera 18 cm? Svoje tvrdnje ilustriraj i dokaži računom.

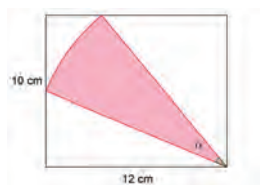


Slika 17.

Ovaj su zadatak pokušale riješiti dvije grupe. Jedna je grupa tražila pomoć, pa sam im pomogla da označe skicu. Ipak se nisu snašli, pa su odustali. Učenici često nemaju strpljenja i odustaju ako odmah ne dobiju ideju kako riješiti zadatak. Druga je grupa primjenom poučka o kosinusu dokazala da polumjer posude mora biti dug barem 8.68 cm.

12. zadatak **

Ivana je stavila jedan komad torte u plastičnu kutiju kao na slici 18. Promjer torte je 26 cm. Odredi kut α .

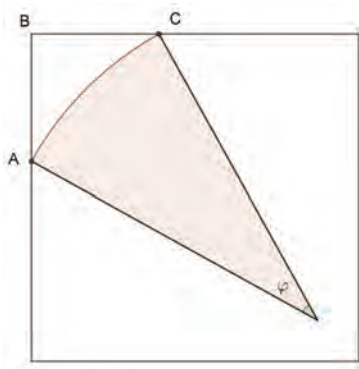


Slika 18.

Dvije su grupe odabrale ovaj zadatak. Dobro su označili skicu i uočili dva pravokutna trokuta koje čine prazni dijelovi kutije. Izračunali su kutove tih dvaju trokuta, a traženi su kut dobili kao razliku pravog kuta i zbroja tih dvaju kutova, $\alpha = 27^\circ 40'$.

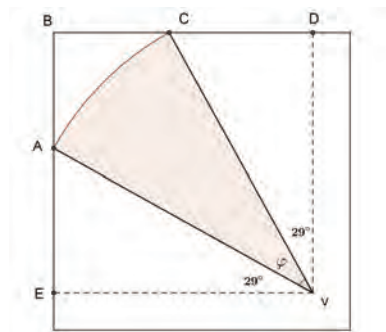
13. zadatak ***

Luka je stavio komad torte u kutiju čija je osnovka kvadrat duljine stranice 15 cm kao na slici 19. Ako je $|AB| = |BC|$, promjer torte 30 cm i $\varphi = 32^\circ$, odredi $|AB|$.



Slika 19.

Samo je jedna grupa odabrala ovaj zadatak, ali su tražili pomoć. Predložila sam im da na skici označe trokut CAV i pogledaju koje elemente trokuta znaju. Nakon što su izračunali duljinu njegove osnovice, lako su izračunali katetu jednakokravnog trokuta ACB . Na satu sam im pokušala pomoći da riješe zadatak na drugi način, koji se dobije iz preuređene skice (slika 20).



Slika 20.

Učenici su uočili da je

$$|EV| = 15 \cos 29^\circ, \quad |CD| = 15 \sin 29^\circ$$

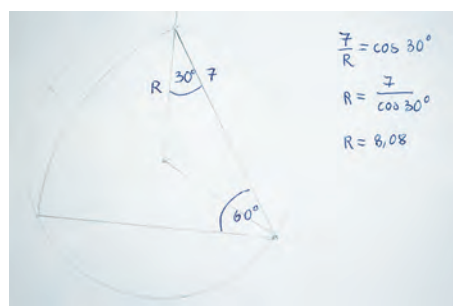
jer je $|AB| = |BC|$, a $|BC| = |EV| - |CD|$. Učenici su dobili rješenje:

$$|AB| = 15(\cos 29^\circ - \sin 29^\circ), \quad |AB| = 5.85 \text{ cm.}$$

14. zadatak **

Ivana je odrezala 1/6 torte promjera 28 cm. Koliki mora biti polumjer okrugle posude da komad torte stane u posudu?

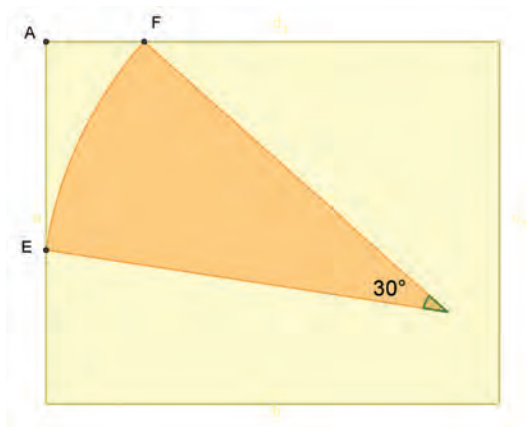
Dvije su grupe odabrale i riješile zadatak (slika 21).



Slika 21.

15. zadatak **

Sanja je stavila komad torte u posudu čije je dno pravokutnik duljine 15 cm i širine 12 cm kao na slici 22. Ako je $|AF| = 3$ cm, a polumjer torte 13 cm, koliko je $|AE|$?

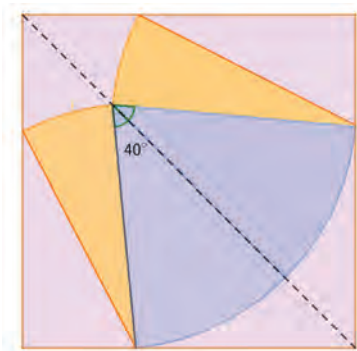


Slika 22.

Zadatak je vrlo sličan 4. zadatku. Odabrala ga je i riješila jedna grupa.

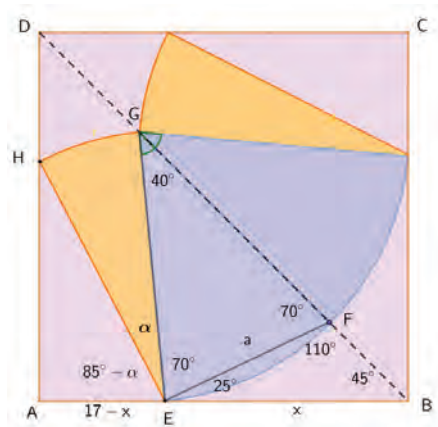
16. zadatak ***

Marko je odrezao dva komada torte promjera 28 cm pod kutom 40° . Uzeo je posudu čije je dno u obliku kvadrata stranice 17 cm i stavio komade kao na slici 23. Marta želi još dva komada torte staviti kao na slici. Pod kojim kutom ih mora odrezati?



Slika 23.

Dvije su grupe odabrale ovaj zadatak, ali im je trebalo malo pomoći. Učenici nisu dobro označili skicu, pa nisu znali odakle početi. Uz malo pomoći označili su jednakokračan trokut EFG , pravokutan AEH i tupokutan EBF , te im izračunali veličine kutova (slika 24). Nakon toga su samostalno izračunali duljinu osnovice jednakokračnog trokuta EFG , zatim duljinu x primjenom poučka o sinusu



Slika 24.

na trokut EBF . Traženi kut dobili su primjenom funkcije kosinus na pravokutni trokut AEH .

Kako je sve prošlo

Na kraju prezentacija pitala sam učenike kako im je bilo raditi na projektu, jesu li zadovoljni svojim radom i što su mogli napraviti bolje. Učenici su rekli da su im zadatci bili teški, ali je bilo dobro što su mogli tražiti pomoć. Svjesni su da im nedostaje znanja iz geometrije. Na prezentacijama su imali veću tremu nego na drugim predmetima, kažu da je to zbog toga što na matematici moraju objašnjavati sve što rade. Jedna je grupa rekla da su se jedva dogovorili što će tko prezentirati. Ipak, kažu da im je bilo zabavno raditi zajedno i zadatci su im bili zanimljivi.

Zadatci koje su grupe riješile ili pokušale riješiti nalaze se u tablici 2.

Učenici trećih razreda su birali teže zadatke i željeli su riješiti više zadataka. Bolje su prihvaćali savjete i pomoć. Na prezentacijama su djelovali sigurnije i bolje su komunicirali s razredom.

Očito je da jedna godina u toj dobi znači puno. Sportskim rječnikom, učenici trećih razreda imaju više utakmica u nogama pa su zato i bili bolji.

U vrednovanju prezentacija sudjelovao je cijeli razred. Podsjetila sam učenike na sastavnice rubrike

2. a	2. b	2. c	3. a	3. b	3. c
1*	2**	4*	3**	5**	2**
14**	7** pomoć	5**	9*	9*	6**
15**	9*	6**	11***	10**	10**
16*** pomoć	10**	8*** pomoć, odustajanje	14**	11*** pomoć, odustajanje	12**
			16*** pomoć	12**	13*** pomoć

Tablica 2.

za vrednovanje i predložila im da vode zabilješke o tome što je bilo dobro ili loše, što je moglo biti bolje.

Na kraju svake prezentacije pročitali smo bilješke učenika. Većina je samo napisala da je sve bilo izvrsno. Učenicima sam ponovno pokazala rubriku za vrednovanje, pa smo zajedno otkrili neke pogreške i nedostatke. Vršnjačko je vrednovanje ponekad teško provoditi. Neki učenici teško vrednuju svoje kolege jer i sami imaju problema s matematičkim konceptima, rječnikom, pravilima. Drugi je aspekt prezentacija način na koji su učenici predstavili svoja rješenja, kako su komunicirali s razredom, jesu li zainteresirali razred za zadatke, kakav su dojam ostavili. Učenici su dobili dvije ocjene, jednu iz elementa *rješavanje problema* i jednu iz *matematičke komunikacije*.

Dvije su grupe imale problema s prezentiranjem radova. Nisu se precizno izražavali, brkali su pojmove, loše objašnjavali postupke. Bila je velika razlika između rješenja zadataka i načina na koji su ih prezentirali. Čini mi se da su učenici imali pomoć sa strane, ali na to je teško utjecati. Ti učenici nisu bili zadovoljni svojim ocjenama, iako sam im pokušala objasniti elemente koji čine ocjenu. Možda sam rubriku za vrednovanje trebala napisati preciznije. Ocijenila sam i nekoliko učenika iz "publike" jer su izvrsno sudjelovali i pokazali veliko razumijevanje prikazanih problema.

Zaključak

Od projekta nisam očekivala da će učenici sami riješiti sve zadatke, napraviti više rješenja, diskutirati savršenim matematičkim rječnikom. Učenici ponekad nisu pokazali dovoljno upornosti pri rješavanju težih zadataka, ali su uz pomoć ipak uspjeli.

Zadovoljna sam što se javilo dosta slabijih učenika, što smo promijenili oblik rada, ponovili staro gradivo i produbili neka znanja. Učenici slabijih sposobnosti sudjelovali su u rješavanju lakših zadataka. Svi lakši zadatci pogodni su za rad u osnovnoj školi, čak i u razrednoj nastavi. Rezati, preslagivati, mjeriti, uspoređivati – aktivnosti su koje često nedostaju u našim razredima. Djeca tako malo rade rukama. Zasićena su raznim aplikacijama gdje u tren dobiješ odgovor. Svi su tražili pomoć za jedan zadatak i bilo je teško odvagnuti koliko im pomoći. Obećala sam im pomoć jer se u početku javilo malo učenika. Na prezentacijama su preuzeli ulogu nastavnika i vidjeli koliko je to ponekad teško.

LITERATURA

- 1/ S. Janeš (2015.): *Projektni zadatci u nastavi matematike*, Alfa, Zagreb
- 2/ Lj. Koritnik i M. Koritnik (2019.): Zadatci otvorenog tipa, *Matematika i škola*, 102, str. 56–0.
- 3/ Lj. Jukić Matić, J. Alilović (2021.): Zadatci više i niže kognitivne razine, *Matematika i škola*, 110, str. 195–199.
- 4/ A. Capan (2020.): Projekt u nastavi matematike, *Matematika i škola*, 105, str. 219–222.
- 5/ A. Miličić (2018.): Projektni zadatak "Kako ja vidim razlomke", *Matematika i škola*, 96, str. 32–33.