

Koliko decimalnih mjesta?

Zrinka Tomašković, Karlovac

Jedna od prvih radnji koje učenici petog razreda osnovne škole izvode s decimalnim brojevima je zaokruživanje decimalnog broja na traženi broj decimalnih mjesta. Ovisno o kontekstu zadatka, o traženoj točnosti, potrebno je zaokružiti decimalni broj na jedno, dva ili više decimalnih mjesta. Ove školske godine našla sam se pred sličnim zadatkom: zaokruživanjem decimalnih brojeva na četiri ili čak pet decimalnih mjesta, zajedno s prvim razredom opće gimnazije (4 sata matematike tjedno) prilikom izračunavanja vrijednosti trigonometrijskih funkcija u pravokutnom trokutu.



Uvodni dio – geografska podloga

Više učenika prvog razreda, smjera opća gimnazija, moralo je biti u samoizolaciji zbog toga jer su bili bliski kontakti osoba koje su zaražene koronavirusom, pa je odlučeno da čitav razred u periodu njihove samoizolacije bude u *online* nastavi.

Osmislila sam nastavni sat na kojem bi učenici zorno doživjeli važnost zaokruživanja vrijednosti trigonometrijskih funkcija na dovoljan broj decimalnih mjesta. Nastavna jedinica bila je *korištenje računala i džepnog računala u izračunu vrijednosti trigonometrijskih funkcija*.

Idea koju sam tijekom tog sata htjela iskoristiti kako bih postigla razumijevanje nužnosti korištenja većeg broja decimalnih mjesta bila je sljedeća: dvije različite točke na Zemaljskoj kugli imaju različite

geografske koordinate. Geografske koordinate su kutovi iskazani u stupnjevima, minutama i sekundama.

Ako za kutove kojima su predočene geografske koordinate računamo vrijednosti trigonometrijskih funkcija, dobivamo različite vrijednosti. Međutim, ako ih zaokružimo na samo dva decimalna mjesta, lokacije koje smo promatrali promijene se. Odnosno, vraćanjem vrijednosti kutova koji predstavljaju geografske koordinate iz zaokruženih vrijednosti trigonometrijskih funkcija dobivene su neke sasvim druge lokacije na Zemaljskoj kugli.

Ukratko, ako ne zaokružujemo vrijednosti trigonometrijskih funkcija na dovoljan broj decimalnih mjesta, a za geografske koordinate uzeli smo recimo geografske koordinate Gimnazije Karlovac, zgrada naše škole "putuje"!

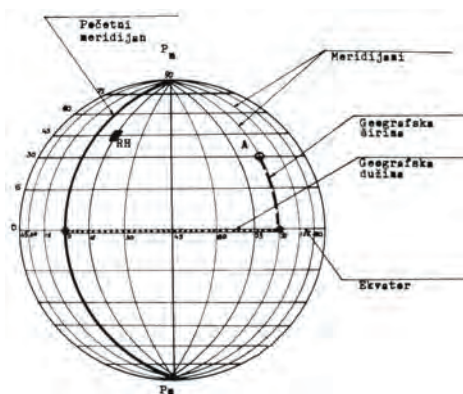
Geografske koordinate¹ veličine su koje određuju položaj točke na Zemljinoj površini. Geografske

Zrinka Tomašković, prof. matematike, Gimnazija Karlovac, zrinka.tomaskovic@skole.hr

¹ geografske koordinate, *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021. <http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=21693>.

su koordinate geografska širina (φ) i geografska dužina (λ); izražavaju se u stupnjevima, minutama i sekundama; u GIS-ovim računalnim programima često su izražene u decimalnim stupnjevima (npr. $26^{\circ}15'18''\text{ N} = 26.255^{\circ}\text{ N}$).

- **Geografska širina** (φ) točke T kut je što ga zatvara normala N , povučena iz točke T na površinu geoida, s ravninom **ekvatora**; računa se od ekvatora na sjever i jug od 0° do 90° .
- **Geografska dužina** (λ) točke T kut je što ga zatvara ravnina **početnoga, nultog meridijana** i meridijana točke T ; očitava se od početnoga meridijana na istok i zapad od 0° do 180° .



Slika 1. Zorni prikaz geografske širine i geografske dužine²

Za one koji žele znati više: U tražilicu Google treba upisati WGS84 (WGS84 je naziv elipsoida³ koji se rabi kao referentni koordinatni sustav⁴).

Online sat – korištenje Google karata

Geografska širina i dužina dva su kuta koji određuju položaj svake točke – lokacije na površini Zemlje. Lako možemo očitati da npr. Republika Hrvatska ima geografsku širinu sjeverno i geografsku dužinu

istočno. Otvorimo Google karte i promotrimo kako se svaka lokacija može pronaći preko njezine zemaljske adrese, ali i preko njezinih geografskih koordinata. Tako je adresa npr. Gimnazije Karlovac Rakovac 4, Karlovac, a isto je tako točan položaj Gimnazije Karlovac određen dvama kutovima:

45.48590721230296° N,

15.556164285356282° E.

Zemaljska adresa Srednje škole Duga Resa je Jozefinska cesta 27, Duga Resa, a točan položaj na određen je i koordinatama

45.449327608666245° N,

15.501841588632102° E.

Udaljenost između tih točaka promatrana zračnom linijom iznosi 5.85 km (izmjereno korištenjem Google karata).

Učenici su tijekom sata sami očitavali sve navedene vrijednosti koristeći se Googleovom aplikacijom Google karte⁵. Čitavo smo vrijeme bili povezani videopozivom putem još jedne Googleove aplikacije: Meet, a kako su učenici na svojim privatnim računalima, mogli su uz videopoziv slobodno upotrijebiti karte.

Zadatci

Rad na satu bio je podijeljen u nekoliko etapa.

Prva je bila očitati s karte koordinate Gimnazije Karlovac i Srednje škole u susjednoj Dugoj Resi.

lokacija	geografska širina	geografska dužina
Gimnazija Karlovac	45.48590721230296° N	15.556164285356282° E
Srednja škola Duga Resa	45.449327608666245° N	15.501841588632102° E

Tablica 1. Geografske koordinate promatranih lokacija

² Preuzeto sa <https://hgk.hr/documents/6-orijentacija5c98d2188d98.pdf>

³ elipsoid, vidi *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021. <http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=17716>

⁴ https://hr.wikipedia.org/wiki/Koordinatni_sustav

⁵ <https://www.google.hr/maps/place/Gimnazija+Karlovac/@45.4857673,15.5539092,17z/data=!3m1!4b1!4m5!3m4!1s0x47643dcb47f40127:0xb9e2dabe9cb01de!8m2!3d45.4857673!4d15.5560979?hl=hr>

Druga etapa bila je, radi jednostavnosti, zaokružiti kutove na stupnjeve, minute i sekunde ($^{\circ}$ ' ").

lokacija	geografska širina	geografska dužina
Gimnazija Karlovac	45°29'9" N	15°33'22" E
Srednja škola Duga Resa	45°26'58" N	15°30'7" E

Tablica 2. Geografske koordinate promatranih lokacija iskazane u stupnjevima, minutama i sekundama

Uočili smo da je razlika u kutovima malena, ali ipak postoji.

Treća etapa bila je odrediti vrijednosti trigonometrijskih funkcija za sve kutove i zaokružiti ih na pet (5) decimalnih mjesta (tablica 3).

Četvrta etapa sastojala se od zaokruživanja vrijednosti trigonometrijskih funkcija za sve kutove na samo dva (2) decimalna mjesta (tablica 4).

Peta etapa bila je sasvim zanimljiva. Iz tablice 4 preuzeli smo vrijednosti trigonometrijskih funkcija i s pomoću kalkulatora računali smo kutove (geografsku širinu i dužinu).

Promotrimo tablice i dobivene kutove.

lokacija	sinus kuta	kut
Gimnazija Karlovac	0.71 0.27	45°14'5" 15°39'51"
Srednja škola Duga Resa	0.71 0.27	45°14'5" 15°39'51"

Tablica 5. Geografska dužina i geografska širina određene iz vrijednosti zaokruženih sinusa

Zaključujemo da se dvije škole, Gimnazija Karlovac i Srednja škola Duga Resa, nalaze na istom mjestu (ali južnije i istočnije nego što se uistinu nalaze).

lokacija	kosinus kuta	kut
Gimnazija Karlovac	0.70 0.96	45°34'23" 16°15'37"
Srednja škola Duga Resa	0.70 0.96	45°34'23" 16°15'37"

Tablica 6. Geografska dužina i geografska širina određene iz vrijednosti zaokruženih kosinusa

Zaključujemo da se dvije škole, Gimnazija Karlovac i Srednja škola Duga Resa nalaze na istom mjestu (ali sjevernije i istočnije nego što se uistinu nalaze)!

kut	sinus kuta	kosinus kuta	tangens kuta	kotangens kuta
45°29'9"	0.71308	0.70109	1.01710	0.98318
15°33'22"	0.26818	0.96337	0.27838	3.59222
45°26'58"	0.71263	0.70154	1.01581	0.98443
15°30'7"	0.26727	0.96362	0.27736	3.60541

Tablica 3. Vrijednosti trigonometrijskih omjera zaokružene na pet decimalnih mjesta

kut	sinus kuta	kosinus kuta	tangens kuta	kotangens kuta
45°29'9"	0.71	0.70	1.02	0.98
15°33'22"	0.27	0.96	0.28	3.59
45°26'58"	0.71	0.70	1.02	0.98
15°30'7"	0.27	0.96	0.28	3.61

Tablica 4. Vrijednosti trigonometrijskih omjera zaokružene na dva decimalna mjesta (crveno su istaknute razlike)

lokacija	tangens kuta	kut
Gimnazija Karlovac	1.02 0.28	45°34'2" 15°38'32"
Srednja škola Duga Resa	1.02 0.28	45°34'2" 15°38'32"

Tablica 7. Geografske dužina i širina određena iz vrijednosti zaokruženih tangensa

Zaključujemo da se dvije škole, Gimnazija Karlovac i Srednja škola Duga Resa, nalaze na istom mjestu!

lokacija	kotangens kuta	kut
Gimnazija Karlovac	0.98 3.59	45°34'43" 15°33'55"
Srednja škola Duga Resa	0.98 3.61	45°34'43" 15°28'59"

Tablica 8. Geografska dužina i geografska širina određene iz vrijednosti zaokruženih kotangensa

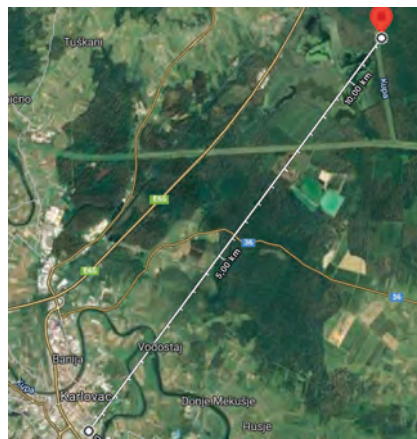
Zaključujemo da dvije škole imaju jednaku geografsku širinu, a u geografskoj dužini se njihove lokacije razlikuju za 4'56". Mjerenjem na karti možemo ustanoviti da je to razlika od 6.4 km. Također, niti jedna od škola ne nalazi se na točnoj lokaciji na kojoj se u realnom svijetu nalazi.

U posljednjoj, šestoj etapi, učenici su trebali upisivanjem dobivene lokacije u Google karte (s pomoću geografskih koordinata) otkriti kamo je škola (Gimnazija Karlovac) zbog nedovoljno preciznog zaokruživanja vrijednosti trigonometrijskih funkcija "otputovala".

Posljednja etapa bila je ujedno možda i najzanimljivija. Slike prikazuju nove lokacije na kojima je bila Gimnazija Karlovac zbog nedovoljne preciznosti u zaokruživanju vrijednosti.



Slika 2. Otputovala je u blizinu mjesta Lekenik u Sisačko-moslavačkoj županiji, udaljenost od prave lokacije: 55.70 km



Slika 3. Otputovala je iza draganićkih ribnjaka, uz odvojak kanala Kupa-Kupa; udaljenost od stvarne lokacije: 11.26 km



Slika 4. Otputovala je u mjesto Duvanji u blizini Petrove gore, udaljenost od prave lokacije: 29.17 km



Slika 5. Završila je u Zagraju kod Draganića, udaljenost od prave lokacije: 9.07 km.

Zaključak – ili: je li se isplatilo?

Šezdeset minuta koliko je trajao videopoziv proletjelo je. Učenici su usvojili osnove korištenja Google karata i skoro čitavo vrijeme su primjenjivali trigonometriju i svoja džepna računala za izračun. Taj dio s uvežbavanjem korištenja njihovih džepnih računala im je često monoton i nezanimljiv. Ovako je bilo zanimljivo jer su uz izračun, koji nije posebno izazovan, promatrali kutove u kontekstu geografskih koordinata i istraživali su kamo će sve Gimnazija "otputovati" samo zbog nedovoljne preciznosti pri zaokruživanju.

LITERATURA

- 1/ geografske koordinate, *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021., <http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=21693>, pristupljeno 26. 1. 2022.
- 2/ <https://hgk.hr/documents/6-orijentacija5c98d2188d98.pdf>, pristupljeno 8. 2. 2022.
- 3/ *Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje*, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021., <http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=17716>, pristupljeno 26. 5. 2022.
- 4/ https://hr.wikipedia.org/wiki/Koordinatni_sustav, pristupljeno 8. 2. 2022.
- 5/ <https://www.google.hr/maps/place/Gimnazija+Karlovac/@45.4857673,15.5539092,17z/data=!3m1!4b1!4m5!3m4!1s0x47643dcb47f40127:0xb9e2dabe9cb01dde!8m2!3d45.4857673!4d15.5560979?hl=hr>, pristupljeno 8. 2. 2022.

Mozgalice

1. Koji matematički simbol treba staviti između 5 i 9 kako bi se dobio broj veći od 5 i manji od 9?
 2. Maja i Marko žele prijeći rijeku kako bi došli na drugu stranu. Rijeku mogu prijeći jedino čamcem, no čamac istovremeno može prevoziti samo jednu osobu. Na raspolaganju nemaju uža ili nešto slično čime bi mogli vući čamac. No, ipak su oboje uspjeli doći na drugu stranu. Kako su to uspjeli?
- 
3. Jednakost $101 - 102 = 1$ nije točna. Koju znamenku treba premjestiti da bi bila točna?
 4. Martin svaki dan mora popiti dvije tablete različitog sastava, nazovimo ih A i B. Ako jednu zaboravi ili popije dvije iste, razboljet će se. Ostale su mu još po dvije tablete A i dvije B. Tablete A i B izgledaju potpuno jednako, a Martin ih je slučajno pomiješao. Što mora napraviti kako bi uzeo zadnje dvije doze tableta?
 5. Darkov ured nalazi se na 10. katu. Kad ide s posla, do prizemlja silazi dizalom. Kad ide na posao, dizalom se uspinje do 7. kata, a nakon toga se uspinje stubama. Dizalom do 10. kata ide samo ako u dizalu ima još osoba ili ako vani pada kiša. Zašto?

Pitanja su preuzeta sa stranice www.mathsisfun.com.

Riješenja: 1. treba staviti decimalnu točku, 2. bili su na suprotnim stranama rijeke, 3. treba pisati $101 - 10^2 = 1$, 4. treba ih preploviti te popiti polovicu od svake, 5. prenzak je i ne može dohvatiti dugme za 10. kat (ako je u liftu još osoba, netko mu može pomoći, a ako pada kiša, tad se poslužuje kišobranom).