

O drugom korijenu

Zašto je drugi korijen nenegativan broj?

Danijela Protega, Zagreb



Pojam drugog (kvadratnog) korijena se u osnovnoj školi uvodi u osmom razredu nakon obrade kvadriranja, dok se u srednjoj školi s programima s barem 3 sata nastave matematike tjedno, pojam drugog korijena (zajedno s trećim) obrađuje u drugom razredu.

Jedan od načina uvođenja drugog korijena je povezivanje s površinom kvadrata. Naime, u situaciji kad je poznata površina P kvadrata, tada se broj kojemu je jednaka duljina stranice tog kvadrata naziva drugi korijen broja P . Osim ovog geometrijskog pristupa moguć je i algebarski pristup u kojem se drugim korijenom broja a naziva nenegativno rješenje jednadžbe $x^2 = a$.

U svakom slučaju, otkrivanje ovog pojma vodi prema iskazu formalne definicije drugog korijena. Tako u udžbeniku [3] za osnovnu školu nalazimo sljedeću definiciju: *Kvadratni korijen (drugi korijen) nenegativnoga racionalnog broja b nenegativni je broj a takav da vrijedi $a^2 = b$. Postoji točno jedan takav broj a i označavamo ga s $\sqrt{b}$.*, a u udžbeniku [1] definicija glasi ovako: *Drugi ili kvadratni korijen pozitivnog broja a je pozitivan broj $\sqrt{a}$ za koji vrijedi: $(\sqrt{a})^2 = a$. Također je $\sqrt{0} = 0$.*

Slične se definicije mogu pronaći u drugim udžbenicima.

Prisjetimo se što su uopće definicije. Definicija nekog pojma je rečenica koja nedvosmisleno opisuje sadržaj tog pojma. Svrha definicije je omogućavanje jednoznačne komunikacije između osoba u nekoj struci i vrlo često imaju elemente dogovora. U definiciji drugog korijena ističu se ovi zahtjevi: drugi korijen broja a je broj koji pomnožen sam sa sobom daje upravo broj a , drugi se korijen računa od nenegativnog broja, drugi je korijen nenegativan broj i jedinstven je.

Prva su dva svojstva u definiciji drugog korijena učenicima vrlo jasna i prihvatljiva. Posve je jasno da u skupu realnih brojeva ne postoji broj koji kvadriran daje negativan broj i taj dio u definiciji učenici prihvaćaju, kao i da je $\sqrt{0} = 0$.

S druge strane, često se susrećemo s učeničkim pitanjima: *Zašto je drugi korijen nenegativan?*, *A zašto je jedinstven?* iz kojih je jasno da su im ti zahtjevi u definiciji upitni i nejasni.

Postavimo li pitanje u razredu *Koliko je $\sqrt{81}$?*, za sigurno će postojati nekolicina učenika koja će odgovoriti -9 i 9 . Veći broj učenika za odgovor će

dati samo 9. Pitamo li dalje Zašto 9?, nerijetko čujemo *Tako sam naučio u osnovnoj školi ili Jer je $\sqrt{a^2} = |a|$* . Zatim nastupaju učenici koji tvrde da je i -9 i 9 korektno, braneći svoj odgovor argumentacijom *Zašto ne može jedno i drugo kad oba broja -9 i 9 imaju svojstvo da kvadrirana daju broj 81, tj. vrijedi da je $(-9)^2 = 9^2 = 81$.*

Kako učenicima pomoći da lakše prihvate definiciju, koji im valjani argument možemo dati, vodeći računa o tome da učenici o funkcijama još nisu učili?

Jednoznačnost je moguće objasniti potrebom da pri računanju s drugim korijenima uvijek dobivamo jednak rezultat te da bi rad s više mogućih vrijednosti korijena doveo do složenih grananja u računu. Možemo tražiti od učenika da upotrebom kalkulatora izračunaju primjerice: $25 - \sqrt{25} + 13 \cdot 5$. Lako se uvjere da dobivamo jedno rješenje. Razlog da nam zbog jednoznačnog računa korijen treba biti jedinstven, prihvaćaju kao valjan i logičan, shvaćajući da nam grananje na slučajeve uvelike otežava situaciju i da je ovdje to stvar dogovora. No, vjerojatno će postojati učenik u razredu koji će se zapitati ili će pitati jasno i glasno *Zašto se uzeo pozitivan broj, a ne negativan?*.

Kako suvislo argumentirati pozitivnost? U toj argumentaciji iskoristimo povijest kako bismo objasnili zašto drugi korijen nije negativan broj. Istražimo povijest nastanka pojma drugog korijena i pojave negativnih brojeva u matematici.

Jednu od prvih pojava drugog korijena pronalazimo kod starih Babilonaca, 1800. – 1600. godine pr. Kr., koji su na glinenim pločama davali prikaz $\sqrt{2}$ s točnošću na 5 decimala.

Dijagonala prikazuje aproksimaciju drugog korijena u četiri seksagezimalne brojke

$$\left(1 + \frac{26}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}\right).$$

Prema nekim istraživanjima stari Egipćani imali su razvijen koncept drugog korijena već od 1650. godine pr. Kr. i primjenjivali su ga u građevini i arhitekturi.

U Indiji, 800. – 500. godine pr. Kr., matematičari dolaze do metode za pronalaženje kvadratnog ko-



Slika 1. Babilonska glinena ploča YBC 7289, preuzeto s Wikipedije (seit public domain)

rijena. Pitagorejci (6. st. pr. Kr.) govore o duljini dijagonale kvadrata s duljinom stranice 1. Dakle, pojam drugog korijena pojavio se i razvio puno prije pojave negativnih brojeva te je od početka drugi korijen vrsta broja koji danas nazivamo pozitivnim brojem. Kao što znamo, negativni su se brojevi pojavili tek oko 200. godine pr. Kr. u Kini. Kinezi su negativne brojeve predstavljali crnom bojom i koristili su se njima u komercijalnim računima. Pozitivne brojeve nazivali su *pravi*, a negativne *dugom*, odnosno *lažnim* brojevima. Matematičari starog vijeka su samo pozitivne brojeve smatrali brojem, za njih su negativni brojevi bili *bismisleni*.

Oko 620. god. u Indiji Brahmagupta primjenjuje ideje “bogatstva” i “dugova” za pozitivno i negativno te daje pravila za računanje s negativnim brojevima rabeći termine manjih i većih negativnih brojeva.

U Europi tek u 13. stoljeću nailazimo na prve tragove o negativnim brojevima, što možemo zahvaliti Fibonacciju kao jednom od prvih talijanskih trgovaca koji je pokazao interes za matematiku. Zbog svakodnevnih ljudskih djelatnosti i napretka u civilizaciji, upotreba negativnih brojeva više se nije mogla izbjeći i negativni brojevi postaju sve prisutniji. Javljaju se i matematičari s mišljenjem kako su pozitivni i negativni brojevi ravnopravni brojevi.

U 17. stoljeću Descartes i Gerardus uvode slovo za broj, što je uvelike olakšalo poimanje negativnog broja. Descartes negativne brojeve smješta na brojevni pravac, lijevo od nule. Konačno, tek u 19. stoljeću dolazi do prihvaćanja negativnih brojeva i negativni brojevi postaju onakvim kakvim ih i danas smatramo.

Ovih nekoliko kratkih crtica iz povijesti pomoći će učenicima u osvješćivanje činjenice da su se negativni brojevi pojavili puno kasnije od pojave i

korištenja drugog korijena te da je ta povijesna činjenica temelj dogovora koji danas imamo kod drugog korijena, tj. da se radi o nenegativnom realnom broju.

Na početku drugog razreda srednje škole argumenti koji proizlaze iz potrebe za jednoznačnim računom i povijesnog tijeka pojave i prihvatanja korijena i negativnih brojeva, dovoljno su valjani za rješavanje učeničkih dilema oko definicije drugog korijena.

LITERATURA

- 1/ B. Dakić, N. Elezović (2020.): *Matematika 2, 1. dio*, Element, Zagreb.
- 2/ A. Klisurić (2014.): *Povijesni počeci nastajanja i razvoja brojeva*, diplomski rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek.
- 3/ G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić (2021.): *Matematički izazovi 8, 1. dio*, Alfa, Zagreb.
- 4/ *Square Root, History*, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Square_rootHistory (pristupljeno 8. listopada 2021.)

In memoriam – Kristina Lukačić (1966. – 2022.)

U svibnju 2022. nakon teške bolesti prerano nas je napustila draga kolegica Kristina Lukačić, učiteljica savjetnica iz Zagreba.

Kristina Lukačić (rođ. Nevistić) rođena je 6. 10. 1966. Pohađala je OŠ Ivo Andrić u Zagrebu, zatim V. gimnaziju te MIOC. Diplomirala je matematiku i informatiku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu 1991. godine. Nakon šest godina rada u privredi, zapošljava se u Srednjoj školi "Vladimir Prelog" kao nastavnica matematike, a od 2003. predaje matematiku u OŠ Bukovac. Njezin rad s djecom uvijek je bio prožet kreativnošću i promišljanjem kako učenicima približiti matematiku i problemske zadatke. Kreirala je web-stranicu s edukativnim sadržajima "Matka za Matkače" za pomoć u učenju matematike za sve razrede osnovne škole, o čemu je pisala u 86. broju Miš-a. Također, kolegica Kristina koautorica je radne bilježnice iz matematike za 5. razred osnovne škole (izdavač Profil-Klett), bila je mentorica učiteljima pripravnicima, pokretačica je i autorica školskog projekta "Potraga za pisanicama", organizatorica Večeri matematike u OŠ Bukovac, sudjelovala je na brojnim usavršavanjima, a 2014. godine na Kongresu nastavnika matematike održala je zapaženo predavanje i radionicu "Matematika kroz igru" u Sekciji za razrednu nastavu. Na tu je temu, zajedno s kolegicom Tihanom Levar, objavila i članak u 84. broju Miš-a pod naslovom "Matematika kroz igru – posudba igara u školi".



Dugi niz godina radila je kao vanjski suradnik – predavač na Učiteljskom fakultetu u Zagrebu gdje je držala metodičke vježbe studentima Učiteljskog studija. U periodu od 2011. do 2015. godine vodila je pripreme učenika za Državnu maturu iz matematike te sudjelovala u pripremi materijala. Bila je članica Akademskog zbora "Ivan Goran Kovačić".

Suprug Igor te kćeri Klara, Marta, Ana i Iva su napisali: *Bila je snažna, samouvjerena žena tople, vedre i srdačne naravi, odličnih komunikacijskih vještina te izrazitog smisla za organizaciju i praktičnost. Bila je izvanredna profesorica, voljena od svojih učenika i davala je 200 % sebe u sve čime se bavila, ali najbolja je ipak bila kao supruga i majka, puna nježnosti i ljubavi prema svojoj obitelji koju nikad nije zapostavljala unatoč velikim količinama posla. Jako nam nedostaje.*

Draga Kristina, tvoja pozitivna, osmijeh i ljubav prema poučavanju matematike ostat će zauvijek među tvojim kolegama i učenicima. Počivaj u miru.

Dubravka Glasnović Gracin