

Jedan matematički dvoboj



Alija Muminagić, Danska

Najčešća aktivnost učenika na nastavi matematike je rješavanje zadataka. Zbog toga je nastavniku bitno odabirati zadatke koji kod učenika razvijaju logičko mišljenje i pobuđuju interes za daljnjim samostalnim istraživanjem.

Ovdje smo izabrali jedan zadatak uz pomoć kojeg ćemo istaknuti i neke zanimljive činjenice iz povijesti matematike. Na taj način povećavamo zanimanje učenika za matematiku te proširujemo njihovu opću kulturu.

Zadatak glasi: *U pravilni peterokut stranice a upiši kvadrat tako da mu je jedna stranica paralelna s nekom stranicom peterokuta.*

Ovdje možemo iskoristiti priliku i učenicima ispričati jednu priču iz povijesti matematike.

Po uzoru na srednjoeuropske viteške turnire i europski matematičari organizirali su matematičke

dvoboje. Za razliku od viteških turnira, gdje je to bila borba plemića – konjanika kopljima, motkama, mačevima i dr., matematički dvoboji organizirani su između dvojice matematičara koji su iz nekih razloga bili u sukobu (npr. oko autorstva, točnosti rezultata, oko smislenosti neke matematičke teorije itd.). Na matematičkom dvoboju bi svaki od sudionika svom rivalu postavio određen broj zadataka koje bi ovaj drugi trebao riješiti. Jedan od tih dvoboja bio je Ferrari¹ protiv Tartaglije².

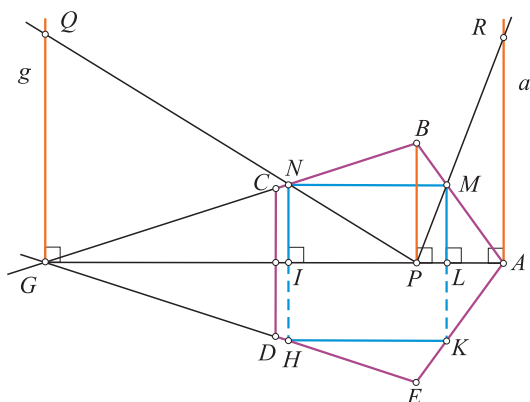
Prvog srpnja 1547. godine L. Ferrari je svom rivalu N. Tartagliji postavio, između ostalih, zadatak o peterokutu. Donosimo ponuđeno rješenje.

Neka je $ABCDE$ dani pravilni peterokut u koji treba upisati kvadrat $KMNH$. Pretpostavimo da je to i napravljeno (vidi sliku). Produljimo stranice peterokuta $\overline{BC}$ i $\overline{ED}$ preko točaka C i D te njihovo sjecište označimo s G . Spojimo točke A i G te sjecišta dužine $\overline{AG}$ i stranice kvadrata $\overline{NH}$ i $\overline{MK}$ označimo

Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

¹ Lodovico de Ferrari (Bologna 2. 2. 1522. – oko Bologne 5. 10. 1565.), talijanski matematičar. Otkrio je formulu za rješavanje općih algebarskih jednadžbi 4. stupnja

² Nicolo Tartaglia (Brescia oko 1500. – Venecija 13. ili 14. 12. 1557.), talijanski matematičar. Pravo mu je prezime bilo Fontana, a novo je dobio zbog govorne mane (mucao je). Bio je samouk. Šira ga matematička javnost ponajviše pamti po matematičkom dvoboju s A. Fiorom (1535.) u kojem je pokazao poznavanje formule za rješenja kubne jednadžbe te po njegovom sukobu s drugim talijanskim matematičarom G. Cardanom oko objavljivanja te formule. Danas, formule za rješavanje jednadžbe 3. stupnja nazivamo Cardano-Tartaglijine formule.



s I i L . Odavde vidimo da je zadatak rješiv ako u trokut ABG možemo upisati pravokutnik $LMNI$ tako da je $|MN| = 2|LM|$.

Tartaglia dalje nastavlja ovako. Iz točke B konstruirao je okomicu BP na dužinu AG , a u točkama A i G konstruirao je okomice a i g te na njima odredio točke R i Q takve da je $|AR| = \frac{1}{2}|AG| = |GQ|$.

Dužine $\overline{PR}$ i $\overline{PQ}$ sijeku stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ u točkama M i N čije su ortogonalne projekcije na dužinu AG točke L i I .

Dokazuje da je $MN \parallel AG$, tj. da je četverokut $LMNI$ pravokutnik.

Iz sličnosti trokuta ARM i BPM te trokuta QGN i PBN slijedi

$$\frac{|MA|}{|AR|} = \frac{|BM|}{|BP|} \quad (1)$$

$$\frac{|GQ|}{|GN|} = \frac{|BP|}{|BN|}, \text{ tj. zbog } |GQ| = |AR|$$

$$\frac{|AR|}{|GN|} = \frac{|BP|}{|BN|}. \quad (2)$$

Množenjem jednakosti (1) i (2) proizlazi da je

$$\frac{|MA|}{|AR|} \cdot \frac{|AR|}{|GN|} = \frac{|BM|}{|BP|} \cdot \frac{|BP|}{|BN|}$$

$$\frac{|MA|}{|GN|} = \frac{|BM|}{|BN|}, \text{ tj. } \frac{|MA|}{|BM|} = \frac{|GN|}{|BN|}.$$

Dakle, $MN \parallel AG$.

Da bi dokazao da je $|MN| = 2|LM|$, promatra omjere:

$$\frac{|AP|}{|AR|} = \frac{|PL|}{|LM|} \text{ i } \frac{|GP|}{|GQ|} = \frac{|IP|}{|IN|}$$

pa zbog $|GQ| = |AR| = \frac{1}{2}|AG|$ i $|IN| = |LM|$ omjere piše u obliku

$$\frac{|AP|}{\frac{1}{2}|AG|} = \frac{|PL|}{|LM|} \text{ i } \frac{|GP|}{\frac{1}{2}|AG|} = \frac{|IP|}{|LM|},$$

a odavde nakon zbrajanja gornjih jednakosti dobiva

$$\frac{|AP| + |GP|}{\frac{1}{2}|AG|} = \frac{|LP| + |IP|}{|LM|}$$

i odavde zbog $|AP| + |GP| = |AG|$ i $|PL| + |IP| = |MN|$ slijedi

$$\frac{|AG|}{\frac{1}{2}|AG|} = \frac{|MN|}{|LM|}, \text{ tj. } 2|LM| = |MN|.$$

Ovime je dokaz završen.

Na županijskom natjecanju 2012./2013. godine dan je sličan zadatak: U pravilni peterokut upisan je kvadrat tako da mu je jedna stranica paralelna s nekom stranicom peterokuta. Dokažite da je duljina stranice kvadrata jednaka $\frac{a \cdot \operatorname{ctg} 18^\circ}{1 + 2 \cdot \cos 18^\circ}$ gdje je a duljina stranice peterokuta.

Riješite ovaj zadatak i u literaturi potražite informacije o konstrukciji pravilnog peterokuta. Svakako pročitajte članak [1].

LITERATURA

- 1/ F. M. Brueckler: O matematičkim dvobojujima, *Hrvatski matematički elektronski časopis, math.e.*, 4.
- 2/ I. Gusić (1995.): *Matematički rječnik*, Element, Zagreb.
- 3/ J. Lützen (1993.): *Cirkulens kvadratur, Vinklens tredeling, Terningens fordobling*, Systime, Denmark.
- 4/ M. Bombardelli, Ž. Haniš, K. A. Škreb (2014.): *Matematička natjecanja 2012./2013.*, Element, Zagreb.