

Presavijanjem papira do pravilnih mnogokuta

Sanja Varošaneć, Zagreb

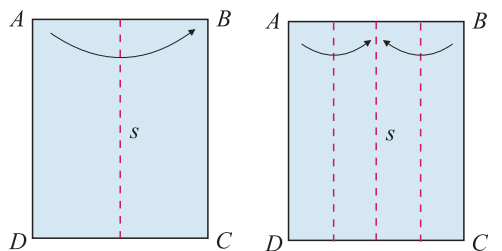
Panoptikum ovog broja posvećen je različitim modelima morskih bića izrađenim tehnikom presavijanja papira. Ova tehnika, odnosno origami, na prvi je pogled u funkciji razbibrige i zabave, ali postupci te tehnike usko su vezani za razne geometrijske objekte i transformacije koje obrađujemo već u osnovnoj školi. O aksiomima, teoremima i nekim primjenama u nastavi može se pročitati u člancima [1, 2, 3]. Uz to, internet je prepun videozapisa uz pomoć kojih se može svladati izrada origami modela.

U ovom članku pažnju ćemo posvetiti izradi nekih pravilnih mnogokuta. Pri izradi koristit ćemo se papir, a škare ćemo upotrijebiti samo pri početnom i završnom oblikovanju papira.

Opišimo prvo dva osnovna postupka: dijeljenje papira na polovine i četvrtine te podjela kuta na dva jednaka dijela.

Dijeljenje papira na jednake dijelove

Presavijmo papir tako da se dužina $\overline{AD}$ poklopi s dužinom $\overline{BC}$ (slika 1). Razmotajmo papir. Pregib



Slika 1.

Slika 2.

je linija s koja dijeli papir na dvije polovine. Ovdje se radi o osnoj simetriji s osi s koja $\overline{AD}$ preslikava u $\overline{BC}$.

Ponavljanjem ovog postupka papir možemo podijeliti na četiri jednaka dijela. Savijemo ga tako da se linija $\overline{AD}$ poklopi s linijom s (slika 2). Razmotajmo papir. Time je lijeva polovina papira podijeljena na dva jednaka dijela. Isti postupak ponovimo na desnoj polovini papira.



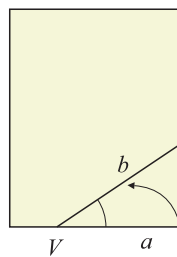
Slika 3.



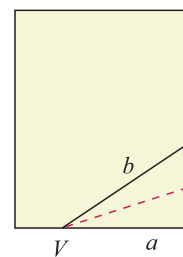
Slika 4.

Raspolavljanje kuta

Na papiru nacrtan je kut $\angle aVb$, pri čemu je krak a na jednom rubu papira (slika 5). Presavijmo papir tako da se krak a poklopi s krakom b pri čemu točka V ostane na mjestu.



Slika 5.



Slika 6.

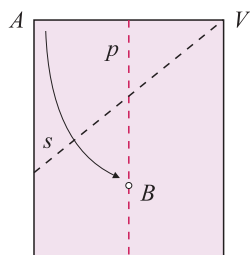
Papir razmotajmo. Pregibna linija dijeli kut $\angle AVB$ na dva jednaka dijela (slika 6). To proizlazi iz činjenice da smo u ovom postupku izveli osnu simetriju čija je os upravo pregibna linija, a polupravac Va preslikao se u polupravac Vb .



Slika 7.

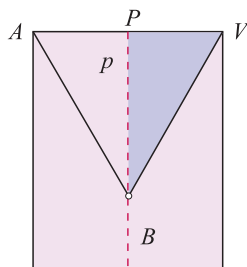
Kutovi od 30° i 60°

Prvo podijelimo papir pravcem p na dva jednaka dijela. Papir presavinemo tako da točka A padne na pravac p , pri čemu točka V ostane fiksna. Točku u koju se preslikala točka A nazovimo B . Razmotajmo papir. Pregibna linija s koja se pojavila simetrizirala je kut $\angle AVB$, pri čemu je $|\angle AVB| = 60^\circ$. Time smo dobili i kut veličine 30° kao kut koji omeđuju VA i s .



Slika 8.

Objasnilo zašto je $|\angle AVB| = 60^\circ$. Promotrimo trokut AVB . Zbog preklapanja papira, tj. postupka kako se došlo do tog trokuta, on je jednakokraničan i krakovi su mu AV i VB . Neka je točka $P \in p$ polovište dužine AV . U pravokutnom trokutu PBV hipotenuza VB je dvostruko dulja od katete VP , a to vrijedi samo u pravokutnom trokutu čiji šiljasti kutovi su 30° i 60° (sjetimo se kako izgleda polovina jednakostraničnog trokuta). Pri tome je kut od 30° nasuprot kateti VB , a kut od 60° je nasuprot kateti PB .

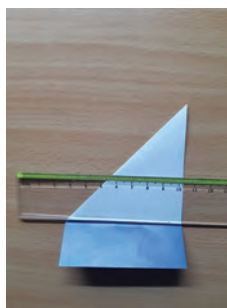


Slika 9.

Dodatno uočimo: budući da je trokut AVB jednakokraničan i kut između krakova je 60° , on je i jednakostraničan.

Kvadrat

Na sljedećim fotografijama dana je izrada kvadrata. Osnovna je ideja korištenje simetrizacije pravog kuta.



Slika 10.

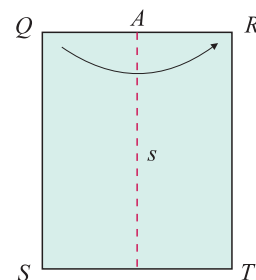


Slika 11.

Pravilni šesterokut

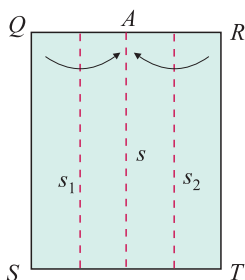
Za izradu pravilnog šesterokuta upotrijebit ćemo papir pravokutnog oblika kojemu je dulja stranica barem 1.2 puta dulja od kraće stranice. Naime, kraća stranica papira će u konačnici biti dvostruka visina karakterističnog trokuta šesterokuta, dok dulja stranica papira mora premašiti dvostruku duljinu stranice šesterokuta, a iz izraza $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ dobivamo da je $2a = \frac{4v}{\sqrt{3}} \approx 1.15(2v)$. Na sljedećim slikama dan je postupak presavijanja papira, a ujedno su uz svaku sliku zapisane činjenice iz kojih proizlazi da je dobiveni šesterokut zaista pravilan.

Označimo vrhove papira slovima Q, R, T i S . Savijmo papir tako da se dužina QS poklopi s RT i razmotajmo papir. Dobivena je linija s koja raspolavlja papir na dva jednaka dijela. Jedna rubna točka te linije označena je s A .



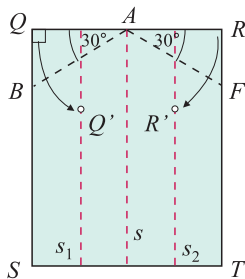
Slika 12.

Papir savijemo tako da se $\overline{QS}$ poklopi s prethodno dobivenom linijom s te ga razmotajmo. Dobili smo liniju s_1 koja lijevu polovinu papira dijeli na dva jednaka dijela. Isto učinimo s desnom polovinom papira.

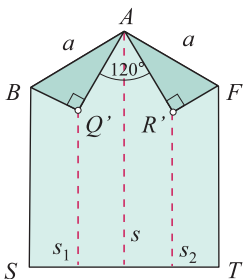


Slika 13.

Papir presavijmo tako da vrh Q padne na liniju s_1 , a točka A ostane fiksna. Pregib je dužina $\overline{AB}$. Time smo našli simetralu kuta $\angle QAQ'$ i kut $\angle QAB$ iznosi 30° . Potom papir presavijmo tako da vrh R padne na liniju s_2 , a točka A ostane fiksna. Kut $\angle FAR$ iznosi 30° , pa je $|\angle BAF| = 120^\circ$. Zbog simetričnosti postupka vrijedi $|AB| = |AF|$. Označimo tu duljinu s a .

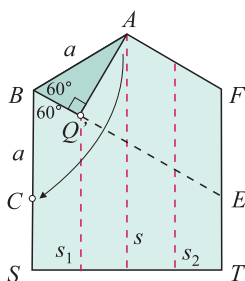


Slika 14.



Slika 15.

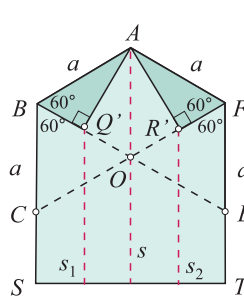
Savijmo papir tako da se linija $\overline{AB}$ poklopi s rubom papira $\overline{BS}$ pri čemu točka B ostaje fiksna. Točka A se preslikala u točku označenu s C . Očito je $|AB| = |BC|$. Papir razmotajmo. Ovo je zapravo postupak stvaranja simetrale kuta $\angle SBA$, tj. dobivena linija $\overline{BE}$ simetrala je kuta $\angle CBA$ čija je veličina 120° .



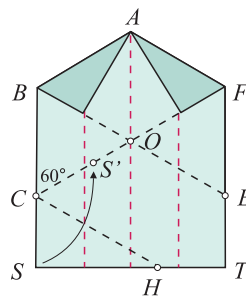
Slika 16.

Prethodni postupak raspolavljanja kuta ponovimo na desnoj polovini papira: papir savijemo tako da se $\overline{AF}$ poklopi s $\overline{FT}$, pri čemu točka F ostaje na miru (slika 17). Pri tome se točka A preslikala u točku

E koja je dobivena u prethodnom postupku. Papir razmotajmo. Veličine kutova su: $|\angle AFC| = 60^\circ$, $|\angle CFE| = 60^\circ$. Također je $|AF| = |FE|$.



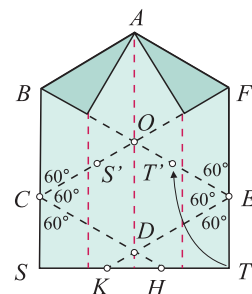
Slika 17.



Slika 18.

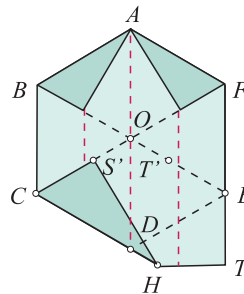
Uočimo da je veličina kuta $\angle FCB$ jednaka 60° , pa je $|\angle SCF| = 120^\circ$. U ovom koraku raspoloviti ćemo kut $\angle SCF$. Presavijmo papir tako da dužina $\overline{SC}$ padne na $\overline{CF}$ pri čemu točku C fiksiramo. Papir rasklopimo. Pojavljuje se linija $\overline{CH}$ koja je simetrala kuta $\angle SCF$, tj. $|\angle HCF| = 60^\circ$ (slika 18).

Isti postupak ponovimo na desnoj polovini papira. Papir savijemo tako da linija $\overline{ET}$ padne na liniju $\overline{EB}$ te ga razmotajmo. Dobili smo liniju $\overline{EK}$ koja je simetrala kuta $\angle TEB$ te je $\angle TEK = 60^\circ$.

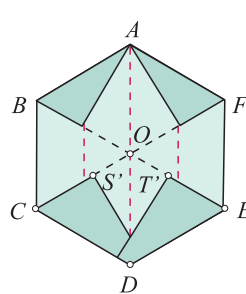


Slika 19.

Papir savijemo po liniji $\overline{CH}$ i ostavimo ga presaviniutog (slika 20).



Slika 20.



Slika 21.

Papir savijemo po liniji $\overline{EK}$ i ostavimo ga presaviniutog (slika 21). Točku u kojoj se sijeku linije

iz posljednja dva koraka nazovimo **D**. Šesterokut $ABCDEF$ je pravilni šesterokut. Okrenimo papir tako da se pojavi "uredna" slika dobivenog lika ili odrežimo sve presavijene dijelove tako da ostane samo šesterokut. Postupak dobivanja pravilnog šesterokuta je gotov.

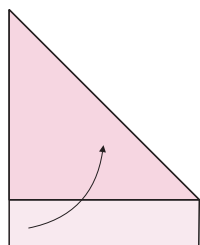


Slika 22.

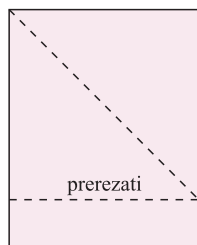
Pravilni osmerokut

U ovom postupku krećemo od komada papira koji nije kvadrat.

Prvo na pravokutnom papiru presavijanjem kraćeg ruba tako da padne na duži rub, a potom presavijanjem papira preko preklapljenog trokuta, dobiva-



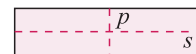
Slika 23.



Slika 24.

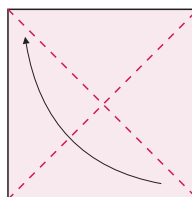
mo kvadrat i preostali dio papira koji je pravokutnik. Razrežemo papir na ta dva dijela.

Pravokutni ostatak papira presavijanjem po dužini i po širini podijelimo na četiri jednaka dijela. Duži pregib označimo sa s , a kraći sa p .

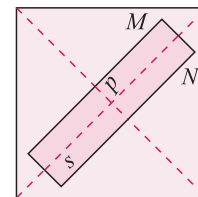


Slika 25.

Na kvadratu presavijanjem i rastvaranjem papira stvorimo i drugu dijagonalu (slika 26).



Slika 26.

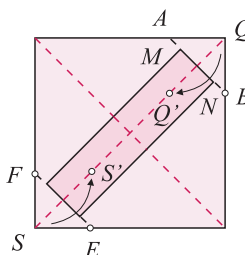


Slika 27.

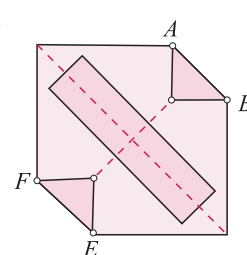
Na kvadrat položimo pravokutnik i to tako da se linija s poklapa s jednom dijagonalom kvadrata, a linija p s drugom dijagonalom (slika 27).

Presavinemo papir kvadrata preko linije MN tako da točka Q padne u Q' (slika 28). Slično presavijanje učinimo i s nasuprotnim vrhom S kvadrata.

Pravokutnik zarotiramo oko središta tako da se linija s poklapa s drugom dijagonalom (slika 29).

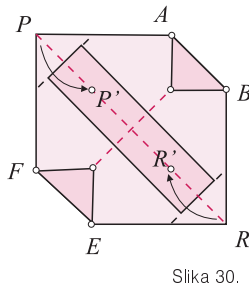


Slika 28.

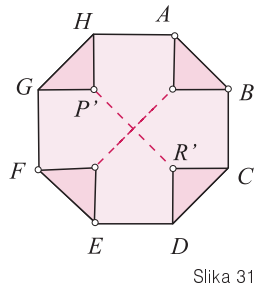


Slika 29.

Papir kvadrata presavinemo preko kraće stranice pravokutnika tako da vrh P padne u P' (slika 30). Slično presavijanje učinimo i s nasuprotnim vrhom R kvadrata.

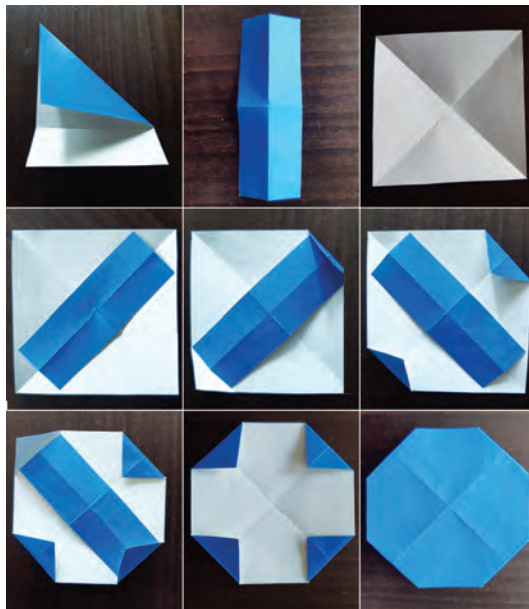


Slika 30.



Slika 31.

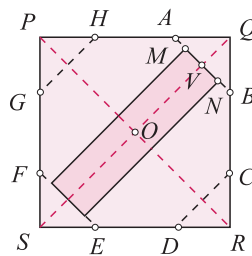
Presavijene trokute ostavimo u tom položaju. Lik $ABCDEFGH$ je pravilni osmerokut (slika 31).



Slika 32.

Objasnjimo zašto je dobiveni lik pravilan.

Ključni je korak bilo korištenje pravokutnog dijela papira čija je jedna stranica bila jednako dugačka kao i stranica kvadrata. Označimo duljinu stranice kvadrata s x . Tada je $|OV| = \frac{x}{2}$.



Slika 33.

Zbog paralelnosti dužina $\overline{PR}$ i $\overline{MN}$ vrijedi da su trokuti PRQ i ABQ slični. To su dva jednakokračna pravokutna trokuta pa je $|QO| = \frac{1}{2}|PR| = \frac{1}{2}\sqrt{2}x$

i $|AB| = 2|QV|$. Još vrijedi: $|QV| = |QO| - |OV| = \frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}$, pa je $|AB| = x(\sqrt{2} - 1)$, $|QB| = |QV|\sqrt{2} = \frac{x}{2}(2 - \sqrt{2})$. Zbog simetričnosti postupka sva četiri preklapljen trokutića su sukladna pa su duljine dužina $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ i $\overline{GH}$ jednake $x(\sqrt{2} - 1)$. Nadalje, $|BC| = |QR| - |QB| - |CR| = x - x(2 - \sqrt{2}) = x(\sqrt{2} - 1)$. Dakle, i preostale četiri stranice lika su dugačke $x(\sqrt{2} - 1)$, tj. lik $ABCDEFGH$ ima stranice jednakih duljina. Za kutove vrijedi: $\angle HAB = 180^\circ - \angle BAQ = 135^\circ$, a zbog simetričnosti postupka preklapanja i svi ostali kutovi su jednako veliki. Dakle, osmerokut $ABCDEFGH$ je pravilan.

Pravilni petorokut

Pravilni peterokut od papira najjednostavnije je dobiti presavijanjem trake papira postupkom kojim uže vezemo u čvor poznat pod nazivom "osmica".



Slika 34.



Slika 35.

LITERATURA

- 1/ S. Gračan (2015.): Matematika savijanja papira, *Matematika i škola*, br. 78, str. 125–131.
- 2/ S. Gračan (2015.): Matematika savijanja papira: korak naprijed, *Matematika i škola*, br. 79, str. 170–175.
- 3/ T. Sabo, S. Rukavina (2017.): Origami i krivulje drugog reda, *Matematika i škola*, br. 86, str. 20–22.