

Zlatni omjer, Fibonaccijeva i zlatna spirala

Milena Sošić i
Karmen Rabar, Rijeka

Uvod

Sveprisutnost matematike nije teško uočiti, stoga se ona ne naziva bezrazložno temeljnom i univerzalnom znanošću. Vrlo često se matematika povezuje s jednadžbama i formulama, međutim, pronalazi se i u različitim aspektima i razdobljima ljudskog postojanja zbog njezine veze između čovjeka i prirode. Primjerice, iracionalan broj nazvan **zlatnim omjerom** (ili **zlatnim rezom**) i krivulja nazvana **zlatnom spiralom**, zanimljive su i neobične poveznice između matematike i tehnike, umjetnosti, arhitekture, graditeljstva, dizajna i prirode.

Mnogi istraživači pronalaze zlatni omjer i zlatnu spiralu u prirodi, u strukturama suncokretovih sjemenki i školjke nautilus, gradi češera, raznim oblicima nekih biljaka, gradi tijela nekih životinja, pa i ljudskog tijela kao i u spiralnim galaksijama u svemiru, ali također i u arhitekturi, graditeljstvu i dizajnu na primjerima primjena proporcija zlatnog omjera.

S druge strane, učestalo je poimanje da je primjena zlatnog omjera i zlatne spirale u arhitekturi i umjetnosti ponekad slučajna, s argumentacijom da nije uvijek poznato jesu li ih autori tijekom povijesti ciljano upotrebljavali u svojim djelima ili su pak u tim djelima naknadno otkrivane njihove povezanosti s osobitostima zlatnog omjera i zlatne spirale. Naime, zlatni omjer je iracionalan broj, nemoguće ga je doći, stoga se uvijek u svim njegovim primjenama koristimo njegovom približnom vrijednosti,



čime se direktno nameće pitanje: *kojom se približnom vrijednosti zlatnog omjera koriste istraživači kad zlatni omjer povezuju s raznim oblicima u prirodi ili u umjetničkim i arhitektonskim djelima?* No, neovisno o tome, tijekom povijesti se u različitim područjima čovjekova života, zlatni omjer najčešće povezivao sa skladnošću, vizualnom harmonijom i ljepotom. Zlatni omjer bio je poznat u Egiptu čak prije 2500 godina, pronalazi se u antičkoj arhitekturi, Indiji, Kini i islamskoj arhitekturi. Stoljećima očarava matematičare, znanstvenike, umjetnike, filozofe i arhitekte koji su otkrivali zlatni omjer svaki put u nekom novom obliku, a u današnje doba iznova pobuđuje interes za njegovo detaljnije proučavanje u svim sferama ljudske djelatnosti.

S motivacijom raznolikosti sveprisutnog pojavljivanja zlatnog omjera i zlatne spirale, u ovom članku ćemo ih detaljnije objasniti te argumentirati neka njihova svojstva, pri čemu ćemo također istaknuti povezanost potencija zlatnog omjera s Fibonaccijevim brojevima i obrazložiti pojam zlatnog pravokutnika koji se povezuje sa zlatnim omjerom i konstrukcijom zlatne spirale.

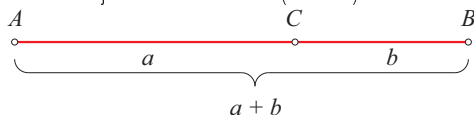
Zlatni omjer

O zlatnom omjeru pisali su stari Grci, umjetnici renesanse, astronomi 17. stoljeća i romanopisci 21. stoljeća. Pojavio se i u priči Starog zavjeta kada je Bog rekao Mojsiju da napravi kovčeg dva i pol lakta dug, lakat i pol širok i lakat i pol visok, gdje je omjer navedenih mjera približno jednak zlatnom omjeru. Iako nije točno poznato kada je zlatni omjer prvi put otkriven i primijenjen, pretpostavlja se da je više puta otkrivan u različitim povijesnim razdobljima.

Tijekom povijesti su neki istraživači i znanstvenici smatrali da se prvi tragovi zlatnog omjera nalaze u dizajnu Fidijinih skulptura, stoga je u 20. stoljeću fizičar Mark Barr (1871. – 1950.) označio zlatni omjer grčkim slovom ϕ (fi) u čast slavnog starogrčkog kiparu i matematičaru Fidiji (Phidias 480. – 430. pr. n. e.), a ta se oznaka koristi i danas.

Talijanski matematičar Luca Pacioli (1445. – 1517.) bio je toliko očaran zlatnim omjerom da je u svojem djelu *De divina proportionem* argumentirao kako bi ga trebalo nazivati *božanskom proporcijom* (božanskim omjerom) te je napisao: "bez matematike nema umjetnosti."

Prvu zabilježenu definiciju zlatnog omjera nalazimo u petom poglavlju knjige *Elementi*, grčkog matematičara Euklida (325. – 265. pr. n. e.), gdje je dužina $\overline{AB}$ podijeljena točkom C na dvije dužine $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$ različitih duljina tako da je omjer duljine dužine $\overline{AB}$ i duljine dulje dužine jednak omjeru duljine dulje dužine i duljine kraće dužine (slika 1).



Slika 1. Zlatni omjer

Konkretno, neka je $|\overline{AB}| = a + b$ duljina dužine $\overline{AB}$, gdje je $a > b > 0$ i neka je C točka na dužini $\overline{AB}$ (različita od točaka A i B), gdje je $a = |\overline{AC}|$, $b = |\overline{CB}|$ takva da vrijedi:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}. \quad (1)$$

Tada realan broj $\phi = \frac{a+b}{a} \left(= \frac{a}{b} \right)$ nazivamo **zlatnim omjerom** i kažemo da točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru ϕ .

Uzimajući u obzir da je $\frac{1}{\phi} = \frac{b}{a}$, dobivamo

$$\phi = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\phi},$$

odakle slijedi:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}. \quad (2)$$

Iz identiteta (2) proizlazi sljedeća kvadratna jednadžba:

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \quad (3)$$

kojoj su rješenja iracionalni brojevi $\phi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ i

$\phi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, gdje je $\phi_1 > 0$ i $\phi_2 < 0$. Primjenom početnog uvjeta $a > b > 0$ na zlatni omjer $\phi = \frac{a}{b}$ proizlazi $\phi > 0$, stoga je zlatni omjer dan izrazom:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad (4)$$

gdje je $\phi \approx 1.6180339887$ približna vrijednost zlatnog omjera.

Koristeći se izrazom (4), iz identiteta (2) proizlazi

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad (5)$$

gdje je $\frac{1}{\phi} \approx 0.6180339887$ približna vrijednost recipročne vrijednosti zlatnog omjera.

Nadalje, iz (2) proizlazi sljedeća tvrdnja.

Razlika zlatnog omjera i njegove recipročne vrijednosti jednaka je jedan.

Primijetimo da navedena tvrdnja vrijedi i za realni

broj $\phi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, tzv. "drugo" rješenje kvadratne jednadžbe (3). Iako se može uočiti da su zlatni omjer $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ($= \phi_1$) i realan broj $\phi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ jedini realni brojevi za koje vrijedi navedena tvrdnja jer su oni ujedno jedina realna rješenja kvadratne jednadžbe (3).

S druge strane, primjenom Vièteovih formula proizlazi da za rješenja ϕ_1 i ϕ_2 kvadratne jednadžbe

(3) vrijedi $\phi_1 + \phi_2 = 1$ i $\phi_1 \cdot \phi_2 = -1$. Pritom $\phi_1 \cdot \phi_2 = -1$ povlači $\phi_j = -\frac{1}{\phi_i}$ za svaki $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, stoga identitet $\phi_1 + \phi_2 = 1$ možemo pisati u obliku $\phi_i = 1 - \phi_j = 1 + \frac{1}{\phi_i}$, odakle slijedi $\phi_i - \frac{1}{\phi_i} = 1$, $i = 1, 2$.

Zapišemo li jednadžbu (3) u obliku

$$\phi^2 = \phi + 1, \quad (6)$$

tada dobivamo da je vrijednost kvadrata zlatnog omjera za jedan veća od njegove vrijednosti.

Fibonaccijevi brojevi i Fibonaccijeva spirala

Fibonaccijevi brojevi i potencije zlatnog omjera

Prije nego uvedemo Fibonaccijeve brojeve, promotrimo najprije potencije ϕ^n zlatnog omjera s prirodnim eksponentom $n \in \mathbf{N}$.

S obzirom na to da se zlatni omjer ϕ može ujedno shvatiti kao potencija ϕ^1 čija je baza jednaka ϕ , a eksponent je jedan i primjenom identiteta (6), s pomoću kojeg se određuju potencije ϕ^n zlatnog omjera ϕ za svaki $n \geq 3$, proizlaze sljedeći identiteti:

$$\begin{aligned} \phi^1 &= 1 \cdot \phi & \phi^2 &= 1 \cdot \phi + 1 \\ \phi^3 &= 2 \cdot \phi + 1 & \phi^4 &= 3 \cdot \phi + 2 \\ \phi^5 &= 5 \cdot \phi + 3 & \phi^6 &= 8 \cdot \phi + 5 \\ \phi^7 &= 13 \cdot \phi + 8 & \phi^8 &= 21 \cdot \phi + 13 \\ \phi^9 &= 34 \cdot \phi + 21 & \phi^{10} &= 55 \cdot \phi + 34 \\ \phi^{11} &= 89 \cdot \phi + 55 & \phi^{12} &= 144 \cdot \phi + 89 \dots \end{aligned}$$

Iz navedenih potencija zlatnog omjera naslućuje se da linearni koeficijenti potencija ϕ^n za svaki $n \in \mathbf{N}$ kao i slobodni članovi potencija ϕ^n za svaki $n \geq 2$ zlatnog omjera ϕ tvore jedan te isti rastući niz

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 \dots \quad (7)$$

kojemu su prva dva člana jednaka jedinici, a svaki sljedeći član, počevši od trećeg, jednak je zbroju njegovih prethodnih dvaju članova. Niz (7) poznat je pod imenom **Fibonaccijeva niza**¹, a njegovi članovi pod imenima **Fibonaccijevih brojeva**.

Uvedemo li oznaku (F_n) za Fibonaccijev niz, gdje F_n označava njegov n -ti član za svaki $n \in \mathbf{N}$, tada u suglasnosti sa (7) možemo pisati:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (8)$$

Izrazom (8) je dana rekurzivna formula kojom se definiraju Fibonaccijevi brojevi. S pomoću nje dokazuje se eksplicitna formula za F_n , poznata pod nazivom Binetova formula:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right),$$

tj. $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - (-1)^n \phi^{-n})$ ako upotrijebimo jednakosti $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$ i $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$. Dokazimo Binetovu formulu matematičkom indukcijom.

- **Baza indukcije:** za $n = 1$ i $n = 2$ vrijedi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^1 - (-1)^1 \phi^{-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 = F_1, \\ & \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^2 - (-1)^2 \phi^{-2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = 1 = F_2, \end{aligned}$$

tj. Binetova formula vrijedi za $n = 1$ i $n = 2$.

- **Pretpostavka indukcije:** pretpostavimo da formula vrijedi za $n = k$ i $n = k - 1$, tj.

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^k - (-1)^k \phi^{-k}), \\ F_{k-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^{k-1} - (-1)^{k-1} \phi^{-(k-1)}). \end{aligned}$$

¹ po talijanskom matematičaru Leonardu iz Pise (1170. – 1250.) poznatijem pod nadimkom Fibonacci

- **Korak indukcije:** dokažimo da za $n = k + 1$ vrijedi $F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^{k+1} - (-1)^{k+1} \phi^{-(k+1)})$.
Prema (8) slijedi

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^k - (-1)^k \phi^{-k}) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^{k-1} - (-1)^{k-1} \phi^{-(k-1)}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^{k-1}(\phi+1) - (-1)^{k-1} \phi^{-k}(-1+\phi)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^{k-1} \cdot \phi^2 - (-1)^{k-1} \phi^{-k} \cdot \frac{1}{\phi} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^{k+1} - (-1)^{k+1} \phi^{-(k+1)}), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Koristeći se (8) proizlazi da potencije broja ϕ s prirodnim eksponentom možemo zapisati u obliku:

$$\phi^n = F_n \cdot \phi + F_{n-1} \quad (9)$$

za svaki $n \geq 2$. Promatramo li niz

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{1} = 1, & \frac{2}{1} = 2, & \frac{3}{2} = 1.5, \\ \frac{5}{3} \approx 1.667, & \frac{8}{5} = 1.6, & \frac{13}{8} = 1.625, \\ \frac{21}{13} \approx 1.615, & \frac{34}{21} \approx 1.619, & \frac{55}{34} \approx 1.618, \\ \frac{89}{55} \approx 1.618 & \dots & \end{array}$$

sastavljen od kvocijenata $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ svakih dvaju susjednih članova Fibonaccijeva niza (F_n) , $n \in \mathbf{N}$, tada se pokazuje da taj niz teži (konvergira) prema zlatnom omjeru ϕ .

Drugim riječima, vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$$

Dokažimo tu tvrdnju. Koristeći Binetovu formulu kvocijent $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ zapišemo ovako:

$$\begin{aligned} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{\phi^{n+1} - (-1)^{n+1} \phi^{-(n+1)}}{\phi^n - (-1)^n \phi^{-n}} \\ &= \frac{\phi^n (\phi - (-1)^{n+1} \phi^{-1} \cdot \phi^{-2n})}{\phi^n (1 - (-1)^n \phi^{-2n})} \\ &= \frac{\phi - (-1)^{n+1} \phi^{-1} \cdot \phi^{-2n}}{1 - (-1)^n \phi^{-2n}}. \end{aligned}$$

Budući da je $\phi^{-2} = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} < 1$, slijedi da je $\lim_{n \rightarrow \infty} (\phi^{-2})^n = 0$ pa je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi - (-1)^{n+1} \phi^{-1} \phi^{-2n}}{1 - (-1)^n \phi^{-2n}} = \phi.$$

Dokažimo sada još jedno zanimljivo svojstvo Fibonaccijevih brojeva.

Zbroj kvadrata prvih n Fibonaccijevih brojeva jednak je umnošku n -tog i $(n+1)$ -vog Fibonaccijeva broja i pišemo:

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (10)$$

Konkretno, za prvih nekoliko prirodnih brojeva iz (10) proizlazi:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \cdot 1 \\ 1^2 + 1^2 &= 1 \cdot 2, \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 &= 2 \cdot 3, \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 &= 3 \cdot 5, \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 &= 5 \cdot 8, \\ 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 &= 8 \cdot 13. \end{aligned}$$

Identitet (10) dokazuje se matematičkom indukcijom.

- **Baza indukcije:** za $n = 1$ provjeravamo vrijedi li da je $F_1^2 = F_1 \cdot F_2$.

Uvrštavanjem vrijednosti Fibonaccijevih brojeva $F_1 = F_2 = 1$ dobivamo da je $1^2 = 1 \cdot 1$ odnosno $1 = 1$, stoga zaključujemo da vrijedi baza indukcije.

- **Pretpostavka indukcije:** pretpostavljamo da (10) vrijedi za $n = k$, odnosno da vrijedi:

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 = F_k \cdot F_{k+1}.$$

- **Korak indukcije:** dokažimo da za $n = k + 1$ vrijedi (10). Dakle, treba dokazati da vrijedi:

$$F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \cdot F_{k+2}.$$

Primjenom pretpostavke indukcije dobivamo:

$$\begin{aligned} \underbrace{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_k^2}_{=F_k \cdot F_{k+1}} + F_{k+1}^2 &= F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) \\ &= F_{k+1} \cdot F_{k+2}. \end{aligned}$$

Time je identitet (10) dokazan.

Francuski matematičar Edouard Lucas (1842. – 1891.), proučavajući Fibonaccijev niz, došao je do saznanja da omjer svaka dva susjedna člana niza

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \dots \quad (11)$$

(po njemu nazvanog Lucasovim nizom), poput Fibonaccijeva niza, teži prema zlatnom omjeru ϕ ili prema njegovoj recipročnoj vrijednosti $\frac{1}{\phi}$.

Pritom su 2 i 1 prva dva člana Lucasova niza (11) i svaki je njegov član, počevši od trećeg, jednak zbroju njegovih prethodnih dvaju članova. Označimo li s (L_n) Lucasov niz kojemu je L_n n -ti član, tada u suglasnosti s (11) definiramo:

$$L_1 = 2, L_2 = 1, L_{n+2} = L_n + L_{n+1}, n \in \mathbf{N} \quad (12)$$

Uspoređivanjem Fibonaccijevih i Lucasovih brojeva prikazanih u tablici 1, dolazimo do zaključka da se njihova međusobna povezanost može iskazati identitetima

$$L_{n+1} = F_{n-1} + F_{n+1}, \quad F_{n-1} = \frac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5}$$

za svaki $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	...
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	...

Tablica 1. Fibonaccijevi i Lucasovi brojevi

Nadalje, primjenom matematičke indukcije, dokažimo da za svaki prirodan broj n vrijedi:

$$L_n = \phi^{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot \phi^{-(n-1)}. \quad (13)$$

- **Baza indukcije:** za $n = 1$ provjeravamo vrijedi li da je $L_1 = 2$. Lako se vidi da za $n = 1$ iz (13) proizlazi $L_1 = \phi^0 + (-1)^0 \cdot \phi^0 = 2$, stoga vrijedi baza indukcije.

- **Pretpostavka indukcije:** pretpostavimo da za prvih k prirodnih brojeva vrijedi

$$L_k = \phi^{k-1} + (-1)^{k-1} \cdot \phi^{-(k-1)}.$$

- **Korak indukcije:** dokažimo da za $n = k + 1$ vrijedi $L_{k+1} = \phi^k + (-1)^k \cdot \phi^{-k}$. Koristeći se (12) slijedi $L_{k+1} = L_{k-1} + L_k$, gdje je $L_{k-1} = \phi^{k-2} + (-1)^{k-2} \cdot \phi^{-(k-2)}$, $L_k = \phi^{k-1} + (-1)^{k-1} \cdot \phi^{-(k-1)}$ (po pretpostavci indukcije), stoga dobivamo:

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= \phi^{k-2} + (-1)^{k-2} \cdot \phi^{-(k-2)} + \phi^{k-1} \\ &\quad + (-1)^{k-1} \cdot \phi^{-(k-1)} \\ &= \phi^{k-1} \left(1 + \frac{1}{\phi} \right) + (-1)^{k-1} \cdot \phi^{-(k-1)} (1 - \phi) \\ &= \phi^k + (-1)^k \cdot \phi^{-k}. \end{aligned}$$

Pritom smo se koristili identitetima $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$ i

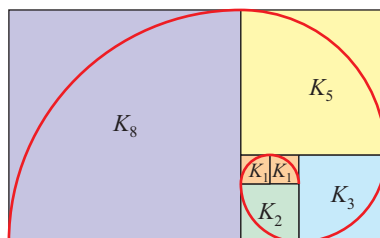
$1 - \phi = (-1) \cdot \phi^{-1}$, vidi (2), i svojstvom množenja potencija jednakih baza. Time je identitet (13) dokazan.

Slično kao za Fibonaccijeve brojeve, vrijedi sljedeći limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \phi.$$

Fibonaccijeva spirala

Svakom Fibonaccijevu broju F_n , $n \in \mathbf{N}$ može se pridružiti kvadrat K_n , $n \in \mathbf{N}$ kojemu je duljina stranice jednaka Fibonaccijevu broju F_n . Pritom K_n nazivamo Fibonaccijevim kvadratom.



Slika 2. Fibonaccijeva spirala

Konstruiramo li Fibonaccijeve kvadrate K_n , $n \in \mathbf{N}$ i u svakome od njih četvrtinu kružnice sa središtem u jednom vrhu kvadrata K_n polumjera F_n koja spaja dva odgovarajuća nasuprotna vrha kvadrata K_n , kako je prikazano na slici 2, tada dobiveni kružni lukovi tvore Fibonaccijevu spiralu.

Uočimo da se spajanjem prvih dvaju Fibonaccijevih kvadrata K_1 i K_2 dobiva pravokutnik P_1 čije su duljine stranica jednake Fibonaccijevim brojevima $F_2 = 1$ i $F_3 = 2$. U nastavku ćemo pravokutnike kojima je duljina stranica jednaka Fibonaccijevim brojevima nazivati Fibonaccijevim pravokutnicima. Nadalje, ako Fibonaccijev pravokutnik P_1 spojimo s Fibonaccijevim kvadratom K_3 , kako je prikazano na slici 2, onda dobivamo Fibonaccijev pravokutnik P_2 čije su duljine stranica jednake Fibonaccijevim brojevima $F_3 = 2$ i $F_4 = 3$. Analogno, Fibonaccijev pravokutnik P_3 dobiva se spajanjem Fibonaccijeva pravokutnika P_2 s Fibonaccijevim kvadratom K_4 , stoga su njegove duljine stranica jednake Fibonaccijevim brojevima $F_4 = 3$ i $F_5 = 5$. Na opisani način svaki Fibonaccijev pravokutnik P_i može se dobiti spajanjem Fibonaccijeva pravokutnika P_{i-1} s Fibonaccijevim kvadratom K_{i+1} , pri čemu su njegove duljine stranica jednake Fibonaccijevim brojevima F_{i+1} i F_{i+2} .

Uvedemo li oznake P_{K_n} za površinu Fibonaccijeva kvadrata K_n i P_{P_n} za površinu Fibonaccijeva pravokutnika P_n , tada je:

$$P_{K_n} = F_n^2, \quad (14)$$

$$P_{P_n} = F_{n+1} \cdot F_{n+2} \quad (15)$$

za svaki $n \in \mathbf{N}$. Koristeći se identitetima (14) i (15), pokazuje se da za svaki $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ vrijedi:

$$P_{P_n} = P_{K_{n+1}} + P_{P_{n-1}}. \quad (16)$$

Konkretno, iz (14) slijedi $P_{K_{n+1}} = F_{n+1}^2$ i analogno iz (15) slijedi $P_{P_{n-1}} = F_n \cdot F_{n+1}$, stoga je

$$\begin{aligned} P_{K_{n+1}} + P_{P_{n-1}} &= F_{n+1}^2 + F_n \cdot F_{n+1} \\ &= F_{n+1}(F_{n+1} + F_n) \\ &= F_{n+1} \cdot F_{n+2} = P_{P_n}, \end{aligned}$$

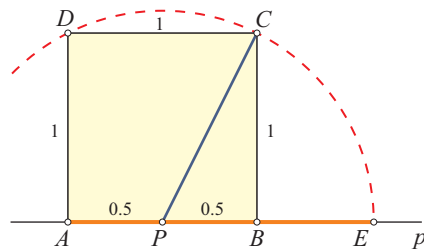
odakle proizlazi identitet (16). Pritom smo se koristili svojstvom (8).

² među njima najstarija je Euklidova konstrukcija zlatnog reza

Zlatni pravokutnik i spirala

Konstrukcija zlatnog reza

Razlikujemo nekoliko međusobno različitih konstrukcija zlatnog reza od kojih su neke jednostavnije, a neke složenije². U nastavku ćemo objasniti jednu od jednostavnijih konstrukcija zlatnog reza.



Slika 3. Konstrukcija zlatnog reza

Konstruirajmo najprije kvadrat $ABCD$ čija je duljina stranice jednaka jedan, a potom označimo s p pravac koji prolazi vrhovima A i B tog kvadrata. Označimo s P polovište dužine AB i konstruirajmo kružni luk sa središtem u točki P polumjera $|PC|$. Sjecište tog kružnog luka i pravca p označimo točkom E , kako je prikazano na slici 3. Tada točka B dijeli dužinu AE u zlatnom omjeru, odnosno vrijedi da je:

$$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BE|} = \phi. \quad (17)$$

Dokažimo identitet (17).

Promatramo li pravokutni trokut PBC s pravim kutom u vrhu B kojemu su $|PB| = \frac{1}{2}$ i $|BC| = 1$ duljine kateta, a $|PC|$ je duljina njegove hipotenuze, tada primjenom Pitagorina poučka slijedi $|PC|^2 = |PB|^2 + |BC|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4}$,

odakle proizlazi $|PC| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Korištenjem svojstva $|PE| = |PC| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ i početne pretpostavke $|PB| = \frac{1}{2}$, proizlazi $|BE| = |PE| -$

$$|PB| = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}, \text{ odnosno:}$$

$$|BE| = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. \quad (18)$$

S druge strane, koristeći se identitetom (18) i početnom pretpostavkom $|AB| = 1$, dobivamo

$$|AE| = |AB| + |BE| = 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \text{ odnosno:}$$

$$|AE| = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \phi. \quad (19)$$

Primjenom (18) i (19) i identiteta $|AB| = 1$ proiz-

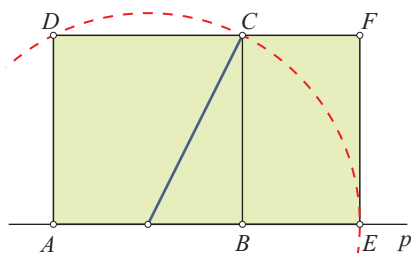
$$\text{lazi } \frac{|AB|}{|BE|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \phi \text{ i}$$

$$\frac{|AE|}{|AB|} = |AE| = \phi. \text{ Time je identitet (17) dokazan.}$$

Zlatni pravokutnik

Zlatnim pravokutnikom nazivamo pravokutnik za koji vrijedi da je omjer duljina njegovih stranica jednak zlatnom omjeru ϕ .

Uzimajući u obzir prethodno navedenu konstrukciju točke E u odnosu na kvadrat $ABCD$ (čija je duljina stranice jednaka jedan), prikazane na slici 3, konstruirajmo pravokutnik $AEFD$, gdje je točka F presjek pravca kroz točke D i C i okomice na taj pravac kroz točku E , vidi sliku 4.



Slika 4. Zlatni pravokutnik $AEFD$

Tada za duljine stranica $|AE|$ i $|EF|$ pravokutnika $AEFD$ vrijedi da je $|AE| = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \phi$, vidi (19),

$$\text{ i } |EF| = |AD| = |AB| = 1, \text{ stoga je } \frac{|AE|}{|EF|} = \phi,$$

što se interpretira da je omjer duljine duže stranice prema duljini kraće stranice pravokutnika $AEFD$ jednak zlatnom omjeru ϕ . Time je $AEFD$ zlatni pravokutnik za koji vrijedi identitet (17). Drugim riječima, na stranici $\overline{AE}$ zlatnog pravokutnika³ $AEFD$ postoji točka B koja dijeli stranicu $\overline{AE}$ u zlatnom omjeru ϕ .

Pritom je točki B jednoznačno pridružena točka⁴ C na stranici $\overline{DF}$ tako da ju dijeli u zlatnom omjeru ϕ .

Nadalje, identitet $|EF| = |AB|$ povlači da se (17) može pisati u obliku

$$\frac{|AE|}{|EF|} = \frac{|EF|}{|BE|} = \phi, \quad (20)$$

gdje omjer $\frac{|EF|}{|BE|} = \phi$ povlači da je $EFCB$ također zlatni pravokutnik, gdje je $|EF| = |BC|$, $|FC| = |BE|$.

Iz navedenog proizlazi da se zlatni pravokutnik $EFCB$ upisan u zlatni pravokutnik $AEFD$ može dobiti odsijecanjem kvadrata $ABCD$ u zlatnom pravokutniku $AEFD$, gdje je duljina stranice kvadrata $ABCD$ jednaka duljini kraće stranice zlatnog pravokutnika $AEFD$.

Zlatna spirala

Konstrukcija zlatne spirale direktno je povezana s konstrukcijama zlatnih pravokutnika upisanih u neki početni zlatni pravokutnik, stoga konstruirajmo najprije zlatni pravokutnik $ABCD$ (vidi sliku 5) kojemu su $|AB| = |DC| = a + b$ i $|AD| = |BC| = a$ duljine stranica takve da je

$$\frac{a+b}{a} = \phi, \quad (21)$$

gdje je $a > b > 0$. S obzirom na prethodno obrazloženo svojstvo zlatnog pravokutnika, vidi identitet (20), zaključujemo da na stranici $\overline{AB}$ zlatnog pravokutnika $ABCD$ postoji točka F koja dijeli stranicu $\overline{AB}$ u zlatnom omjeru ϕ . Pritom je

³ ili analogno na stranici $\overline{DF}$ zlatnog pravokutnika $AEFD$ postoji točka C koja dijeli stranicu $\overline{DF}$ u zlatnom omjeru

⁴ primijetimo da je točka C presjek pravca kroz točke D i F i okomice na taj pravac kroz točku B

$|AF| = |AD| = a$, $|FB| = |AB| - |AF| = b$ i vrijedi:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi. \quad (22)$$

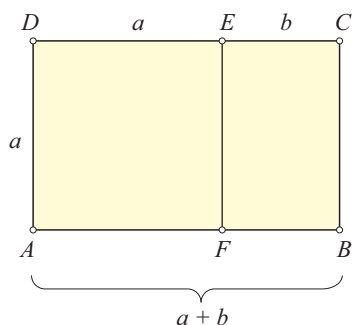
Točki F jednoznačno je pridružena točka⁵ E na stranici $\overline{DC}$ takva da je $|DE| = |AF| = a$ i $|EC| = |FB| = b$, stoga točka E dijeli stranicu $\overline{DC}$ u zlatnom omjeru ϕ .

Pritom iz (22) proizlazi:

$$a+b = a \cdot \phi \quad (23)$$

$$a = b \cdot \phi. \quad (24)$$

Odsijecanjem kvadrata⁶ $AFED$ u zlatnom pravokutniku $ABCD$ dobiva se zlatni pravokutnik $BCEF$ kojemu su $|BC| = a$ i $|FB| = b$ duljine stranica, vidi sliku 5.



Slika 5. Zlatni pravokutnik sa stranicama $a+b$ i a

Na prethodno opisani način, na stranici $\overline{BC}$ zlatnog pravokutnika $BCEF$ postoji točka G koja dijeli stranicu $\overline{BC}$ u zlatnom omjeru, pri čemu je $|GC| = |FB| = b$ i $|BG| = |BC| - |GC| = a-b$ i vrijedi $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} = \phi$, odakle proizlazi:

$$b = (a-b) \cdot \phi. \quad (25)$$

Jasno, točki G jednoznačno je pridružena točka H na stranici $\overline{FE}$ tako da ju dijeli u zlatnom omjeru ϕ . Pritom je $|HE| = |GC| = b$ i $|FH| = |BG| = a-b$.

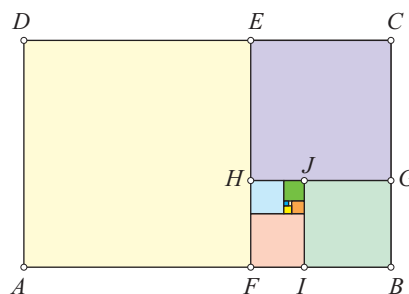
Navedeni postupak nastavljamo tako da u zlatnom pravokutniku $BCEF$ odsijecemo kvadrat $GCEH$

kojemu je b duljina stranice. Time dobivamo zlatni pravokutnik $FBGH$ kojemu su $|FB| = b$ i $|BG| = a-b$ duljine stranica.

Analogno gore navedenom, na stranici $\overline{FB}$ zlatnog pravokutnika $FBGH$ postoji točka I koja dijeli stranicu $\overline{FB}$ u zlatnom omjeru, pri čemu je $|IB| = |BG| = a-b$ i $|FI| = |FB| - |IB| = b - (a-b) = 2b-a$ i vrijedi $\frac{b}{a-b} = \frac{a-b}{2b-a} = \phi$, odakle proizlazi:

$$a-b = (2b-a) \cdot \phi. \quad (26)$$

Pritom je točki I jednoznačno pridružena točka J na stranici $\overline{HG}$ koja ju dijeli u zlatnom omjeru, pri čemu je $|JG| = |IB| = a-b$ i $|HJ| = |FI| = 2b-a$.



Slika 6. Zlatni pravokutnici upisani u zlatni pravokutnik $ABCD$

Na opisani način, upisivanjem zlatnih pravokutnika u zadani zlatni pravokutnik $ABCD$ dobiva se beskonačno mnogo upisanih zlatnih pravokutnika čije duljine stranica možemo promatrati kao elemente padajućeg niza

$$a+b, a, b, a-b, 2b-a, 2a-3b, \dots$$

koji ćemo označiti s (K_n) i nazvati **zlatnim nizom**. Elemente K_n , $n \in \mathbf{N}$ zlatnog niza (K_n) zapisujemo rekurzivnom formulom:

$$K_1 = a+b, \quad K_2 = a, \quad K_{n+2} = K_n - K_{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Pritom za svaka dva susjedna člana zlatnog niza vrijedi:

$$\frac{K_n}{K_{n+1}} = \phi. \quad (27)$$

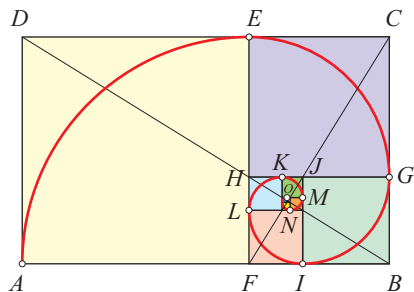
Ponavljajući postupak upisivanja zlatnih pravokutnika u početni zlatni pravokutnik, dolazimo do još

⁵ presjek pravca kroz točke D i C i okomice na taj pravac kroz točku F

⁶ kojemu je a duljina stranice ujedno jednaka duljini kraće stranice zlatnog pravokutnika $ABCD$

⁷ navedene točke ujedno su suprotni vrhovi upisanih kvadrata u odgovarajuće zlatne pravokutnike, počevši od zlatnog pravokutnika $ABCD$

jednog zanimljivog svojstva, a to je da točke⁷ $A, E, G, I, L, K, M, N, \dots, O$ pripadaju krivulji koju nazivamo **zlatnom spiralom**, pri čemu je O njezina asimptotska točka⁸.



Slika 7. Konstrukcija zlatne spirale

Konstrukcija zlatne spirale provodi se analogno kao i konstrukcija Fibonaccijeve spirale, tako da se konstruiraju odgovarajući kružni lukovi, gdje svaki kružni luk ima središte u jednom vrhu kvadrata i spaja dva suprotna vrha tog kvadrata upisanog u pripadni zlatni pravokutnik.

Obratimo sada pozornost na površine zlatnih pravokutnika prikazanih na slikama 6 i 7.

Primjenom identiteta (23) i činjenice da su $a + b$ i a duljine stranice pravokutnika $ABCD$ slijedi da je površina zlatnog pravokutnika $ABCD$ dana izrazom:

$$P_{ABCD} = (a + b) \cdot a = a^2 \cdot \phi. \quad (28)$$

U zlatnom pravokutniku $ABCD$ upisan je kvadrat $AFED$ kojemu je a duljina stranice (jednaka duljini kraće stranice pravokutnika $ABCD$), stoga je površina kvadrata $AFED$ jednaka a^2 . Time iz (28) proizlazi da se površina zlatnog pravokutnika $ABCD$ može pisati u obliku umnoška površine njemu upisanog kvadrata i broja ϕ . Navedeno svojstvo vrijedi za svaki zlatni pravokutnik i njemu odgovarajući upisani kvadrat. Konkretno, iz (24) proizlazi da je

$$P_{BCEF} = a \cdot b = b^2 \cdot \phi$$

površina zlatnog pravokutnika $BCEF$, gdje je b^2 površina njemu upisanog kvadrata čija je duljina stranice jednaka duljini kraće stranice pravokutnika $BCEF$. Također, primjenom (25) dobivamo da površina zlatnog pravokutnika $FBGH$ iznosi

$$P_{FBGH} = b \cdot (a - b) = (a - b)^2 \cdot \phi,$$

gdje je $(a - b)^2$ zapravo površina njemu upisanog kvadrata $IBGJ$.

Obzirom na prethodno navedeno, zaključujemo da je svaki omjer površine zlatnog pravokutnika i površine njemu upisanog kvadrata jednak broju ϕ .

Drugim riječima, površina bilo kojeg zlatnog pravokutnika proporcionalna je s površinom njemu odgovarajućeg upisanog kvadrata, gdje je koeficijent proporcionalnosti jednak zlatnom omjeru ϕ .

S druge strane, ako duljine stranica zlatnih pravokutnika promatramo kao elemente zlatnog niza (K_n) , onda je umnožak svakih dvaju njegovih susjednih članova K_n i K_{n+1} , $n \in \mathbf{N}$ jednak površini P_n odgovarajućeg zlatnog pravokutnika i pišemo:

$$P_n = K_n \cdot K_{n+1},$$

odnosno $P_n = K_{n+1}^2 \cdot \phi$, vidi (27).

Spomenimo da Fibonaccijevoj i zlatnoj spirali nalikuje poznata krivulja, logaritamska spirala čija se jednadžba $r = a^\varphi$ izražava u polarnom sustavu, gdje je $a > 0$, $a \neq 1$, $\varphi \in \mathbf{R}$. Logaritamsku spiralu detaljno su proučavali René Descartes (1596. – 1650.) i Jacob Bernoulli (1655. – 1705.) koji je bio toliko impresioniran njome da ju je nazvao čudesnom spiralom (lat. *spira mirabilis*).

LITERATURA

- 1/ R. A. Dunlap (1997.): *Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific, Singapore.
- 2/ P. Hemenway (2009.): *Tajni kod, zlatni omjer – tajanstvena formula koja vlada umjetnošću, prirodom i znanosti*, VBZ, Zagreb.
- 3/ K. Katušić (2017.): *Geometrija zlatnog reza*, diplomski rad, Osijek.
- 4/ E. Maor (1994.): *The Story of a Number*, Princeton University press, Princeton.
- 5/ K. Rabar (2020.): *Primjene zlatnog reza i zlatna spirala*, završni rad na preddiplomskom studiju matematike, Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci.
- 6/ A. A. Savelov (1979.): *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb.
- 7/ S. Zlatić (2013.): *Zlatni rez*, *Tehnički glasnik*, Sv. 7, Br. 1.

⁸ točka oko koje se krivulja ovija beskonačno mnogo puta približavajući joj se na po volji malo udaljenosti, ali ju nikad ne doseže