

Kompleksni brojevi kao kvadratne matrice



Sanja Sruk, Zagreb

Kompleksni brojevi u standardnom ili algebarskom obliku ($z = a + bi$) i trigonometrijskom obliku ($z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$) srednjoškolsko su gradivo i dobro su nam poznati. Manje je poznat prikaz kompleksnih brojeva u obliku matrica.

Malo povijesti

Za razliku od realnih brojeva kompleksni brojevi ne izražavaju količinu ili veličinu, ali se upotrebljavaju u rješavanju računskih zadataka s realnim brojevima (npr. kvadratne ili kubne jednadžbe) i imaju široku primjenu izvan matematike. Dugo su bili odbacivani i smatrani beskorisnima. Prve ideje o postojanju takvih brojeva pojavile su se još u staroj Grčkoj, no temelji su im postavljeni tek u 16. stoljeću, kad je i uveden pojam imaginarne jedinice kao $\sqrt{-1}$.

U 16. stoljeću matematičari su se intenzivno bavili problematikom rješavanja jednadžbi trećeg stupnja. Jedan tip kubne jednadžbe prvi je uspio riješiti Scipione del Ferro, koji je tek na samrtno otkrio svoju metodu, a zatim su svoj doprinos dali Niccolo Tartaglia i Girolamo Cardano. U to vrijeme ni negativni brojevi nisu bili potpuno prihvaćeni, a ideja o postojanju kompleksnih brojeva nije postojala. Cardano je pojavu kvadratnog korijena iz negativnog broja u svojim računima prvo smatrao

pogreškom, a kad je uvidio da pogreške nema, prihvatio ga je kao pomoćnu veličinu u računu, ali ne i kao samostalan broj. Ipak, to je bio početak povijesti kompleksnih brojeva. Tartaglia i Cardano sudjelovali su u matematičkim nadmetanjima koja su bila popularna u to vrijeme i žestoko se sukobili zbog otkrivanja metode rješavanja kubnih jednadžbi. Više o tom, ali i drugim sukobima među matematičarima, možete pročitati u zanimljivoj knjizi *Matematički dvoboji* autorice Franke Miriam Brückler.

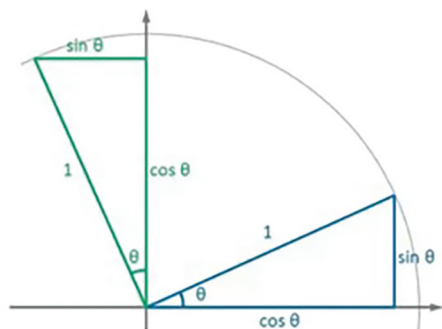
U 17. stoljeću kompleksni brojevi još uvijek nisu bili prihvaćeni. Otkrivanje geometrijske interpretacije kompleksnih brojeva započeo je René Descartes, a unaprijedio John Wallis. Interes za kompleksne brojeve pokazao je i Leonhard Euler u 18. stoljeću. On je uveo oznaku i za imaginarnu jedinicu i otkrio poznatu formulu $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ iz koje proizlazi po mnogima najljepša matematička jednakost $e^{i\pi} + 1 = 0$. Daljnje doprinose nalazimo u radovima de Moivre-a i Gaussa, po kome je i nazvana ravnina u kojoj se prikazuju kompleksni brojevi, ali i mnogih drugih matematičara 18. i 19. stoljeća.

Sanja Sruk, prof. matematike, I. gimnazija, Zagreb sanja.sruk1@gmail.com

Ideju da se kompleksni brojevi mogu prikazati u obliku kvadratnih matrica susrećemo tridesetih godina 20. stoljeća u radovima Copsona i Wedderburna iako je još sredinom 19. stoljeća Cayley pisao o prikazu kvaterniona s pomoću matrica.

Matrica rotacije

Uzmemo li ishodište koordinatnog sustava kao centar rotacije pa rotiramo točku $(1, 0)$ za kut θ , ona će se preslikati u točku $(\cos \theta, \sin \theta)$. Analogno, točka $(0, 1)$ će se preslikati u točku $(-\sin \theta, \cos \theta)$.



Rotaciju tih točaka možemo promatrati i kao rotaciju jediničnih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$. Bilo koju točku (a, b) možemo promatrati kao vektor $a\vec{i} + b\vec{j}$, pa ona rotacijom prelazi u točku (a', b') za čije koordinate, gledano vektorski, vrijedi:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} &= a \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a \cos \theta - b \sin \theta \\ a \sin \theta + b \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matrica $R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ naziva se matrica rotacije za kut θ u smjeru obrnutom od kazaljke na satu.

Matrični prikaz kompleksnog broja

Matricu rotacije R možemo zapisati u obliku

$$R = \cos \theta \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sin \theta \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

pa kad uočimo sličnost s Eulerovom formulom $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ i trigonometrijskim zapisom kompleksnog broja $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$,

možemo broju 1 pridružiti matricu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, a broju

i matricu $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Sad svakom kompleksnom

broju $z = a + bi$ možemo pridružiti matricu

$$Z = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

a skup kompleksnih brojeva definirati na sljedeći način:

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\}.$$

Svojstva kompleksnih brojeva

Provjerimo imaju li kompleksni brojevi zapisani u matričnom obliku ista svojstva kao i oni u standardnom. Jednakost kompleksnih brojeva slijedi iz jednakosti matrica, a lako se vidi da zbrajanje i množenje skalarom daju isti rezultat bez obzira računamo li u standardnom ili matričnom obliku:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\lambda z = \lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi$$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c & -b - d \\ b + d & a + c \end{bmatrix}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a & -\lambda b \\ \lambda b & \lambda a \end{bmatrix}.$$

Problem bismo mogli očekivati prilikom množenja kompleksnih brojeva jer je ono komutativno, a množenje matrica nije. Međutim, bez obzira na

to kojim redoslijedom množimo, rezultat je isti:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i = w \cdot z \\ Z \cdot W &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{bmatrix} \\ W \cdot Z &= \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ bc + ad & -bd + ac \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Preostalo je vidjeti što je s dijeljenjem. Dijeljenje matrica definira se kao množenje s inverznom matricom. Pa nađimo inverznu matricu matrice Z :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|cc} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \end{array} \right] &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{-b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{a^2 + b^2}{a} & \frac{-b}{a} & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ 0 & 1 & \frac{-b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{array} \right] \end{aligned}$$

pa slijedi da je

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2 + b^2} & \frac{b}{a^2 + b^2} \\ \frac{-b}{a^2 + b^2} & \frac{a}{a^2 + b^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

No, matricom $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ prikazujemo kompleksno konjugirani broj broja z pa vrijedi:

$$Z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \bar{Z},$$

tj. $Z \cdot \bar{Z} = (a^2 + b^2) \cdot I$ (matrični zapis množenja dvaju kompleksno konjugiranih brojeva).

$$\text{Konačno, } z : w = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \text{ te}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{c^2 + d^2} \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{c^2 + d^2} \begin{bmatrix} ac + bd & ad - bc \\ bc - ad & bd + ac \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Modul kompleksnog broja u matričnom zapisu jednak je korijenu determinante njegove matrice:

$$\det \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2.$$

Kvaternioni

Iako se može činiti da je ovaj zapis zgodan, ali beskoristan, on se itekako upotrebljava. Algebarsko proširenje skupa kompleksnih brojeva je skup kvaterniona koje je 1843. godine formulisao irski matematičar W. R. Hamilton pa se njemu u čast taj skup označava H . Kvaternioni su brojevi oblika $a + bi + cj + dk$, pri čemu su i, j i k imaginarne jedinice i vrijedi $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. Za razliku od realnih i kompleksnih brojeva, množenje kvaterniona nije komutativno. Vrijedi $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Mogu se prikazati s pomoću kompleksne matrice:

$$\begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix}$$

ili s pomoću realne matrice:

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}.$$

Prikaz s pomoću realne matrice nije jedinstven. Kvaternioni imaju prilično široku upotrebu, od prikaza trodimenzionalne rotacije u računalnoj grafici, preko procesiranja signala pa do kvantne mehanike i robotike. Ni tu nije kraj. Skup kvaterniona može se proširiti na skup oktoniona... ali o tome nekom drugom zgodom.

LITERATURA

- 1/ F. Alam: *Matrix representation of complex numbers*, <https://theeducationalblog.quora.com/Matrix-representation-of-complex-numbers>
- 2/ M. A. Khamsi: *Complex numbers as matrices*, <http://www.sosmath.com/matrix/complex/complex.html>
- 3/ *Quaternion*, <https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>
- 4/ *History of the matrix representation of complex numbers*, <https://math.stackexchange.com/questions/886872/history-of-the-matrix-representation-of-complex-numbers>