

Gdje je nestalo logičko zaključivanje?

Suzana Antunović i Kristina Marušić, Split

Zadnjih nekoliko godina u obrazovnim se krugovima puno priča o uspjehu učenika na državnoj maturi iz matematike. Analiziraju se zadatci, načini bodovanja i pragovi prolaznosti. Posljednje tri godine priča se intenzivirala zbog provođenja *online* nastave, pri čemu se od učenika očekivao malo veći angažman nego prilikom klasične nastave. No, rijetko se spominje s kakvim (ne)znanjem i problemima se susreću sveučilišni profesori od kojih se očekuje da doneseno znanje iz osnovnog i srednjoškolskog obrazovanja nadograđuju složenijim matematičkim pojmovima.



Uvod

Gotovo je nemoguće izgraditi kvalitetno matematičko znanje i razumijevanje bez dobrih temelja. Pogreške koje se sve češće pojavljuju kod studenata tehničkih fakulteta pokazuju nerazumijevanje osnovnih matematičkih koncepata poput razlomaka, negativnih brojeva i korijena. Nije riječ samo o pogreškama koje su rezultat nepažnje pojedinca, nego o duboko ukorijenjenim zabludama koje se javljaju kroz cijele generacije i onemogućavaju kvalitetan razvoj daljnjeg obrazovanja. Od studenata koji su položili višu razinu državne mature iz matematike samo tri mjeseca ranije očekuje se poznavanje osnovnih matematičkih pojmova. Međutim, iz godine u godinu u sustavu visokog obrazovanja vidljiv je zastrašujući manjak razumijevanja napisanog i sve

veći broj pogrešaka koje se odnose na pojmove poput negativnih brojeva, razlomaka i funkcija. Je li riječ o zabludama ili manjku promišljanja i "zdrave" logike? Kako očekivati da student usvoji pojmove poput integrala, diferencijalne jednačbe ili funkcije više varijabli ako smatra da je $-2 < -3$?

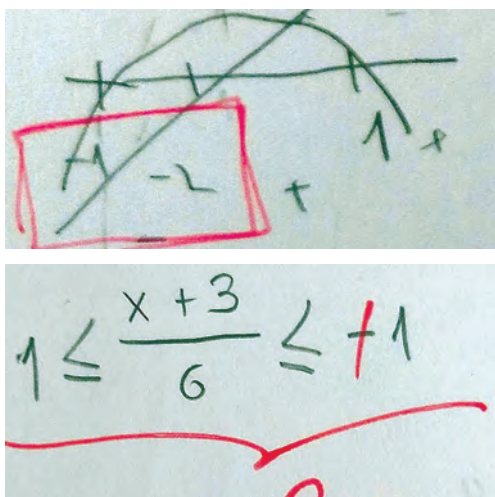
Cilj ovoga rada jest identificirati progreske koje se pojavljuju kod studenata uvodnih matematičkih kolegija na tehničkim fakultetima. Analizirali smo više od tisuću testova, kolokvija i parcijalnih ispita te su izdvojene pogreške koje su se pojavile u barem 20 % analiziranih zadataka. Obuhvaćeni vremenski raspon je od 2017. do 2021. godine, pa u obzir uzimamo i zadatke studenata koji su tijekom srednje škole imali klasičnu nastavu uživo kao i one koji su se susreli s *online* nastavom tijekom pandemije.

dr. sc. Suzana Antunović, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Split, santunovic@gradst.hr
 Kristina Marušić, učiteljica matematike i fizike, OŠ Stobreč, Split, pleic.kristina@gmail.com

Česte pogreške

Negativni brojevi

Nepoznavanje svojstava negativnih brojeva i nemogućnost usporedbe dvaju negativnih brojeva predstavlja jedan od najvećih problema s kojima se susrećemo na uvodnim kolegijima koji se uglavnom sastoje od ponavljanja i nadograđivanja gradiva srednje škole. Iako se negativni brojevi obrađuju u 6. razredu osnovne škole i sustavno se upotrebljavaju tijekom cjelokupnog procesa obrazovanja, nerijetko se dogodi da ih studenti nisu dobro usvojili. Najčešće pogreške odnose se na prikazivanje negativnih brojeva u koordinatnom sustavu i rješavanje linearnih nejednadžbi (slika 1).



Slika 1. Najčešće pogreške vezane za negativne brojeve

Za primjenu određenog integrala potrebno je izračunati površinu ravninskog lika ili volumen rotacijskog tijela. Kako potaknuti studenta koji dobije negativnu površinu ili volumen da se zapita postoji li neki problem s tim rješenjem (slika 2).

Korjenovanje

Prilikom određivanja domene neke funkcije često se u zadacima pojavljuju kvadratne nejednadžbe. Vrlo često studenti primjenjuju ovu logiku: "kvadriranje treba poništiti korjenovanjem." Na taj način

Izračun volumena koji daje negativnu vrijednost, s crvenim napomenama "NEGATIVAN" i "VOLUMEN !!!".

Slika 2. Negativan volumen tijela

nastaju pogreške kao na slici 3 u kojoj je apsolutno nejasno koji se skup brojeva želi obuhvatiti.

Prikazuje se $x^2 > 1$ i $x > \pm 1$.

Slika 3. Korjenovanje nejednadžbi i problem s intervalom

Problemi s korjenovanjem ne prestaju ovdje. Korijen zbroja ili razlike često se zapisuje kao zbroj ili razlika korijena (slika 4).

Prikazuje se $x^2 + x^4 - 2 = 0$ i $x^2 + x^4 - 2 = 0$ s crvenim okrugom oko 17 i pitanjem "?!?".

Slika 4. Korjenovanje zbroja

Funkcije

Funkcija je jedan od temeljnih pojmova koji se detaljno obrađuje na uvodnim kolegijima tehničkih fakulteta. Eksponencijalnu funkciju i njezina svojstva upoznaju u 3. razredu srednje škole, a detaljno se razrade i ponove u kolegiju Matematika 1. Na slici 5 prikazani su načini rješavanja istog zadatka.

$$x^2 - 1 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$$

$$-1 \leq 12 - 4x \quad ???$$

$$-4 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \geq 0$$

$$-2^{3-x} \geq 0$$

ne može se odukratiti

$$-4 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \geq 0$$

$$-\left(\frac{3}{2}\right)^{3-x} \geq 0$$

Slika 5. Nepoznavanje svojstava eksponencijalne funkcije

Razlomci

Razlomci su gradivo 5. razreda osnovne škole. Nepoznavanje gradiva o razlomcima najčešće ispliva prilikom rješavanja neodređenih integrala. Tada se, s ciljem izbjegavanja primjene bilo koje metode rješavanja osim tabličnog integriranja, racionalne funkcije "rastavljaju" na svakakve načine (slika 6).

$$\int \frac{x}{2x^2 + 2x + 5} dx = \int \frac{x}{2x^2} dx + \int \frac{x}{2x} dx + \int \frac{x}{5} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{5} \int dx$$

ne može se ovako rastavljati!

Slika 6. "Rastavljanje" racionalne funkcije

Posebno je problematično što studenti ne znaju koristiti se vrlo jednostavnim razlomcima koji ne uključuju "nepoznanice" nego konkretne brojeve (slika 7).

$$r = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}}$$

$$r = \sqrt{\frac{4}{8}}$$

$$\frac{-\frac{1}{3}}{1} = -3$$

Slika 7. Pogreške prilikom računanja s razlomcima

Nula

Metode kojima se koriste prilikom računanja s nulom često se "poopće" na ostale brojeve (slika 8).

Ako je umnožak dvaju brojeva jednak 0, onda je jedan od faktora jednak nuli. Problem nastaje kada

$$\frac{\sqrt{2}}{0} = 0$$

Dijeljenje s 0

Slika 8. Dijeljenje s nulom

se ista logika primijeni na neki drugi broj. Primjerice, iz jednakosti $a \cdot b = 2$ slijedi $a = 2$ ili $b = 2$ (slika 9).

$$x(x+1) = 2$$

$$x_1 = 2 \quad x+1 = 2$$

Slika 9. "Poopćenje" računanja s nulom

Još jedan primjer "poopćavanja" dan je na slici 10. Potrebno je riješiti nejednakost $\frac{a}{b} < 0$. Pravilno ćemo zaključiti da su moguća dva slučaja, jedan je $a > 0$ i $b < 0$, a drugi $a < 0$ i $b > 0$. Ponekad se takav način razmišljanja primijeni i ako s desne strane nejednakosti nije nula.

$$\frac{1-x^2}{x+2} \leq 1$$

$$1-x^2 \leq 1$$

$$x+2 > 1$$

$$1-x^2 \geq 1$$

$$x+2 < 1$$

Slika 10. "Poopćenje" računanja s nulom

Zaključak

Nakon svih razmatranja navedenih u članku, nameće se nekoliko ključnih pitanja:

- Je li riječ o duboko ukorijenjenim zabludama ili o manjku logičke analize napisanog?
- Je li moguće nastavu prilagoditi tako da se ovakve pogreške u velikom broju izbjegnu?
- Snose li studenti dio odgovornosti zbog pogrešaka koje čine?

Predavanja vezana za ovu temu autorice su održale na više obrazovnih konferencija i povratna reakcija nastavnika pokazuje kako su oni često nesvjesni da se takve vrste pogrešaka mogu događati na razini visokog obrazovanja. U našem obrazovnom sustavu vidljivo je da praktički ne postoji komunikacija među nastavnicima matematike na različitim razinama obrazovanja. Bolja suradnja među nastavnicima i zajednički rad na ovakvim i sličnim problemima zasigurno bi nam svima olakšao posao.