

Povijest računanja površine trokuta s cjelobrojnim stranicama

Josip Sliško, Puebla, Meksiko

Formula za računanje površine trokuta $P = \frac{av_a}{2}$ (polovina umnoška duljine stranice a i na nju spuštene visine v_a) jedna je od prvih formula koje učenici nauče u školskoj matematici. Postupak računanja visine korištenjem Pitagorina poučka relativno je jednostavan za jednakostranične i jednakokračne trokute. No, složeniji je u slučaju raznostraničnih trokuta i prikaz tog postupka učenicima je različit ovisno o udžbeniku kojim se koristimo.

U svrhu poticanja učeničkog kreativnog mišljenja, korisno je znati kako je kroz povijest matematike rješavan problem računanja površine raznostraničnih trokuta s cjelobrojnim stranicama.

Površine trokuta u Heronovom djelu *Metrika*

Za razliku od Euklida koji je razmatrao i deduktivno dokazivao opće geometrijske relacije, grčki matematičar, fizičar i izumitelj Heron iz Aleksandrije (slika 1) u svom je djelu *Metrika* [2] računao površine trokuta s konkretnim cjelobrojnim vrijednostima za duljine stranica.



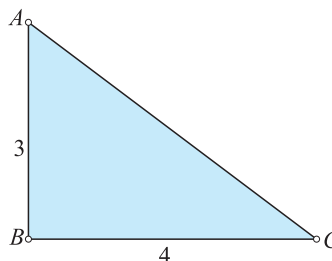
Slika 1. Heron iz Aleksandrije (10. – 70.), izvor Wikipedia



Primjena Euklidovih propozicija o trokutima

Heron prvo prikazuje postupke računanja površina trokuta koji se temelje na Euklidovim propozicijama.

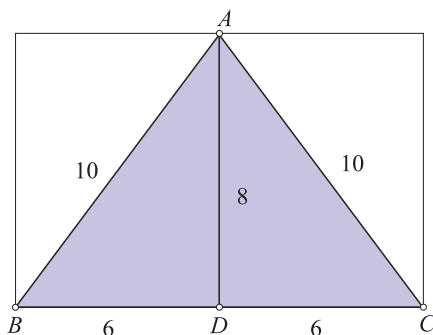
Prvi primjer primjene je nalaženje površine pravokutnog trokuta s katetama duljina 3 i 4 (slika 2).



Slika 2. Pravokutni trokut s katetama 3 i 4

U skladu s propozicijom 41 iz prve knjige Euklidovih *Elemenata* [3] Heron iskazuje površinu tog trokuta kao polovinu površine pravokutnika sa stranicama duljina 3 i 4 koja je jednaka 12. Dakle, površina pravokutnog trokuta jednaka je polovini umnoška 3 i 4, tj. jednaka je 6. Heron također dodaje da je duljina hipotenuze tog trokuta jednaka 5.

Drugi primjer je računanje površine jednakokrakog šiljastokutnog trokuta s osnovicom 12 i kracima 10 (slika 3).



Slika 3. Jednakokraki šiljastokutni trokut s osnovicom 12 i kracima 10

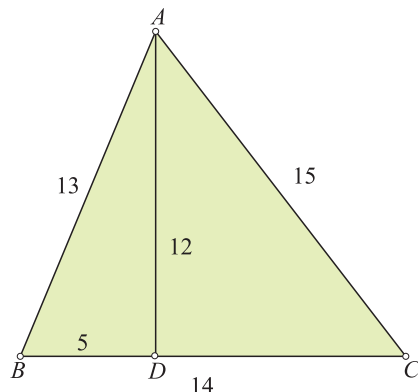
Visina tog šiljastokutnog trokuta je 8. Ponovno se Heron koristi idejom da je površina trokuta jednaka polovini površine pravokutnika sa stranicama 12 i 8. Kako je ta površina 96, površina trokuta je 48. Važno je naglasiti da je promatrani trokut "nastao" spajanjem dvaju jednostavnijih i poznatih pravokutnih trokuta s katetama duljina 6 i 8 i hipotenzom duljine 10.

Lako je uočiti da je trokut sa stranicama duljina 6, 8 i 10 "dva puta uvećana" inačica egipatskog trokuta sa stranicama duljina 3, 4 i 5. Stoga se prirodno pojavljuje sljedeći konceptualni zadatak.

Ako je površina pravokutnog trokuta sa stranicama duljina 3, 4 i 5 jednaka 6, kolika je površina pravokutnog trokuta sa stranicama duljina 6, 8 i 10?

Učenici koji nisu svladali "iluziju linearnosti" [7] će umjesto točnog odgovora 24 dati pogrešan odgovor 12.

Treći Heronov primjer je raznostranični šiljastokutni trokut sa stranicama duljina 13, 14 i 15 (slika 4).



Slika 4. Raznostranični šiljastokutni trokut sa stranicama 13, 14 i 15.

Propoziciju 13 koja određuje geometrijsku relaciju između duljina stranica raznostraničnog šiljastokutnog trokuta i duljine jednog od dijelova na koje visina dijeli jednu od stranica trokuta izveo je Euklid u drugoj knjizi *Elemenata* [3]. U slučaju Heronova trokuta ta relacija glasi:

Površina kvadrata nad stranicom $\overline{AC}$ dobije se kada se od zbroja površina kvadrata nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ oduzme dvostruka površina pravokutnika sa stranicama $\overline{BD}$ i $\overline{BC}$.

Iskazana suvremenim oznakama, relacija poprima oblik:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2(|BC| \cdot |BD|).$$

Zbog toga je Heronov numerički algoritam za nalazjenje duljine $\overline{BD}$ bio:

$$\begin{aligned} 13^2 &= 169, & 14^2 &= 196 \\ 169 + 196 &= 365 \\ 15^2 &= 225 \\ 365 - 225 &= 140 \\ \frac{140}{2} &= 70 \\ \frac{70}{14} &= 5 = |BD|. \end{aligned}$$

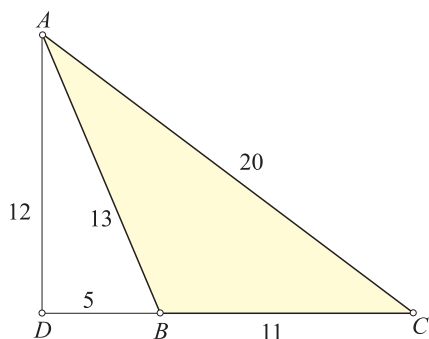
Primjenom Pitagorina poučka Heron nalazi kvadrat duljine visine $\overline{AD}$:

$$|AD|^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144.$$

Sama visina duga je 12. Sljedeći Euklidovu terminologiju, površina trokuta je polovina površine

pravokutnika sa stranicama duljina 14 i 12. Kako je površina tog četverokuta 168, površina trokuta je 84.

Heron je primijenio isti postupak i za tupokutni raznostranični trokut sa stranicama duljina 11, 13 i 20 (slika 5).



Slika 5. Raznostranični tupokutni trokut sa stranicama 11, 13 i 20.

Euklidova relacija sada ima oblik:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + 2(|BC| \cdot |BD|).$$

Heronov numerički algoritam za nalaženje duljine $\overline{BD}$ postaje:

$$\begin{aligned} 13^2 &= 169 & 11^2 &= 121 \\ 169 + 121 &= 290 \\ 20^2 &= 400 \\ 400 - 290 &= 110 \\ \frac{110}{2} &= 55 \\ \frac{55}{11} &= 5 = |BD|. \end{aligned}$$

Primjenom Pitagorina poučka Heron nalazi kvadrat duljine visine $\overline{AD}$:

$$|AD|^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144.$$

Sama visina duga je 12.

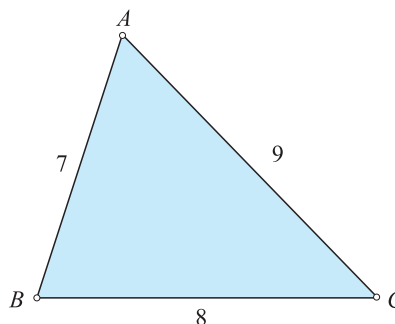
Površinu traženog tupokutnog trokuta nalazi Heron kao polovinu površine pravokutnika sa stranicama duljina 11 i 12. Kako je $11 \cdot 12 = 132$, površina tupokutnog trokuta je 66.

Alternativni i očigledniji način (slika 5) je sljedeći: Površina tupokutnog trokuta dobiva se kada se od

polovine površine pravokutnika sa stranicama 16 i 12 oduzme površina pravokutnog trokuta s kate-tama 5 i 12. Kako je površina četverokuta 192, polovina je jednaka 96. Ako se od toga oduzme površina pravokutnog trokuta koja je jednaka 30, dobiva se da je površina tupokutnog trokuta 66.

Heronov originalni postupak za računanje površine trokuta

Nakon postupka u kojem se koristio Euklidovim propozicijama, Heron je predstavio i svoj opći postupak nalaženja površine bilo kojeg trokuta kada su poznate duljine svih triju stranica bez poznavanja visina. Postupak uvodi na primjeru šiljastokutnog raznostraničnog trokuta sa stranicama duljina 7, 8 i 9 (slika 6).



Slika 6. Raznostranični šiljastokutni trokut sa stranicama 7, 8 i 9.

Postupak opisuje riječima:

- Zbroji 7, 8 i 9. Dobiva se 24.
- Uzmi polovinu od 24. Dobiva se 12.
- Od 12 oduzmi 7, razlika je 5.
- Od 12 oduzmi 8, razlika je 4.
- Od 12 oduzmi 9, razlika je 3.
- Pomnoži 12 i 5. Dobiva se 60.
- To pomnoži s 4, rezultat je 240.
- Pomnoži ga s 3 i to postaje 720.
- Kvadratni korijen od tog broja bit će površina trokuta.

Heron je, naravno, zamijetio da kvadratni korijen iz 720 nije cijeli broj. Napomenuo je da je najbliži broj s cjelobrojnim korijenom 729. Korijen iz tog broja je 27. Nakon toga dijeli 720 s 27 i dobiva rezultat $26\frac{2}{3}$. Tom rezultatu dodaje 27 i dobiva $53\frac{2}{3}$. Kada

je taj broj podijelio s 2, dobio je $26\frac{5}{6}$. Izračunao

je da je kvadrat tog broja $720\frac{1}{36}$, što je smatrao veoma dobrom aproksimacijom tražene površine.

Nakon što je geometrijski dokazao da je njegov postupak ispravan, Heron ga primjenjuje na već razmatrani šiljastokutni raznostranični trokut sa stranicama duljina 13, 14 i 15:

- Zbroji 13, 14 i 15. Dobiva se 42. Polovina od toga je 21.
- Oduzmi 13, razlika je 8.
- Nakon toga (od 21) oduzmi 14, razlika je 7.
- I dalje (od 21) oduzmi 15, razlika je 6.
- Pomnoži 21 i 8, zatim taj rezultat pomnoži sa 7 pa sa 6.
- Te operacije daju 7056.
- Kvadratni korijen iz 7056 je 84 i to će biti površina trokuta.

Važno je napomenuti da je Heron za računanje površine jednog te istog trokuta sa stranicama duljina 13, 14 i 15 koristio dva potpuno različita postupka.

Računanje površine trokuta sa stranicama 13, 14 i 15 nakon Herona

Za vrijeme Rimskog Carstva grčka matematička dostignuća se "zaboravljaju" što je dovelo do značajne dekadencije matematike, i u praktičnim primjenama i u teorijskom razvoju.

Rimski su geometri za računanje površina mnogokuta primjenjivali potpuno pogrešne postupke. Na primjer, za površinu jednakostraničnog trokuta sa stranicom $a = 60$, Collumela se koristio formulom:

$$P = a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Površina koja se dobiva iznosi 1800 [8].

Heron je poznao mnogo bolju približnu formulu:

$$P = \frac{13a^2}{30}.$$

Ta formula daje vrijednost površine 1560, koja se neznatno razlikuje od stvarne vrijednosti 1558.85.

Grčka matematika nastavila je "živjeti" u arapskom svijetu, pa su se mnoga značajna matematička djela "vratila" u Europu nakon njihovih latinskih prijevoda s arapskog jezika.

Al-Khwarizmi i algebarski postupak

Površinu raznostraničnog trokuta sa stranicama 13, 14 i 15 (slika 7) je u IX. stoljeću izračunao Muhamed Ben Musa al-Khwarizmi. Upotrijebio je riječima opisan svoj algebarski postupak.

Kada se taj postupak napiše simbolički, dobivaju se moderna algebarska jednadžba i njezino rješenje za nepoznati dio x stranice 14, koju spuštenu visina dijeli na x i $14 - x$ [5]:

$$\begin{aligned} 15^2 - (14 - x)^2 &= 13^2 - x^2 \\ 15^2 - 196 - x^2 + 28x &= 169 - x^2 \\ 29 + 28x &= 169 \\ 28x &= 140 \\ x &= 5. \end{aligned}$$

Kada se zna da je $x = 5$, tražena visina h je:

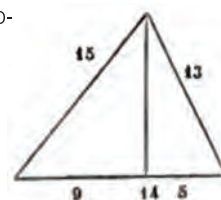
$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12.$$

Površina trokuta jednaka je umnošku visine i polovine osnove: $P = 12 \cdot \frac{14}{2} = 12 \cdot 7 = 84$.

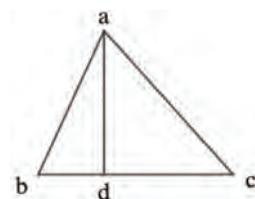
Postupci kojima su se koristili Fibonacci, Pacioli i Ramus

Fibonacci se bavio geometrijskim problemima u svom rukopisu *Practica geometriae* koji završio 1220. godine. Engleski prijevod s komentarima uredio je i objavio Hughes tek 2008. godine.

Fibonacci je računao površinu trokuta sa stranicama duljina 13, 14 i 15 [4]. Dok je za Heronov



Slika 7. Crtež kojim se koristio al-Khwarizmi u svom algebarskom postupku, [5]



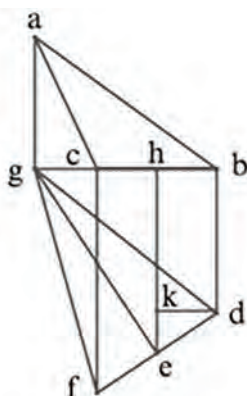
Slika 8. Crtež kojim se koristio Fibonacci za nalaženje površine trokuta duljina stranica 13, 14 i 15 [4]. Uočimo da Fibonacci vrhove trokuta označava malim slovima.

jednakokrani trokut sa stranicama duljina 12, 10 i 10 u crtežu upotrijebio brojčane vrijednosti, sada je vizualizacija potpuno geometrijska (slika 8), a u tekstu se navodi da vrijedi: $ab = 13$, $ac = 15$ i $bc = 14$.

Fibonacci navodi tri različita postupka za izračun duljina bd i dc na koje visina ad dijeli stranicu 14. Svaki od njih dovodi do istog rezultata: $bd = 5$ i $dc = 9$.

Oba rezultata daju da je vrijednost visine ad na stranicu 14 jednaka 12. Na taj način površina trokuta (umnožak polovine osnovice i visine ili umnožak osnovice i polovine visine jednaka: $7 \cdot 12 = 14 \cdot 6 = 84$).

Za površinu tupokutnog trokuta sa stranicama $cb = 11$, $ac = 13$ i $ab = 20$ Fibonacci razvija složeni geometrijski postupak u kojem je primijenio svojstva niza pomoćnih likova (slika 9).



Slika 9. Fibonaccijev crtež koji je osnova njegovog složenog geometrijskog postupka [4]

Fibonacci je kao i Heron izračunao da je tražena površina trokuta 66.

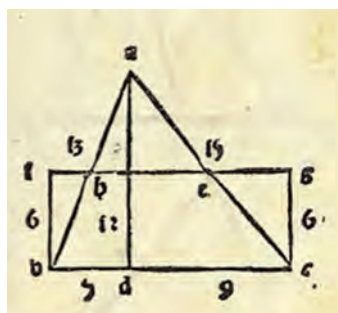
Nakon toga u odjeljku "Heronov teorem" kao "savršen program za mjerenje" navodi Heronov postupak nalaženja površine trokuta bez poznavanja visine:

Zbroji stranice trokuta i uzmi polovinu zbroja. Od te polovine oduzmi redom stranice trokuta. Nakon toga pomnoži sve tri dobivene razlike. Nakon toga, konačni umnožak pomnoži polovinom zbroja triju stranica. Kvadratni korijen tog umnoška površina je čitavog trokuta.

Na primjer, zbroj stranica 13, 11 i 20 gore opisanog trokuta je 44, od toga je polovina 22. Razlika toga i najdulje stranice je 2, sljedeće stranice je 9, a treće stranice je 11. Sada pomnoži 2 (rezultat oduzimanja prve stranice), 9 (razlika sljedeće stranice) i 11 (razlika treće stranice). Dobije se 198. Pomnoži taj broj i 22 (polovina zbroja stranica), dobije se 4356. Korijen iz tog broja je površina trokuta. Taj korijen je 66, kao što smo ranije izračunali za taj trokut [4].

Luca Pacioli, u svojoj knjizi *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et propotionalita*, objavljenoj 1494. godine, računa na dva načina površinu trokuta sa stranicama duljina 13, 14 i 15. Ne spominjući Fibonaccijevo i Heronovo autorstvo, nalazi da je površina jednaka 84.

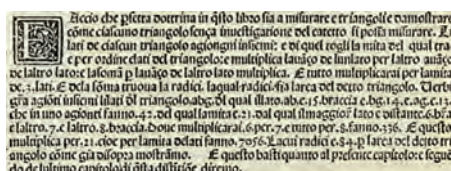
U prvom postupku [6] upotrijebio je Fibonaccijev rezultat da je ta površina jednaka površini četverokuta sa stranicama 14 i 6 (slika 10).



Slika 10. Crtež koji pokazuje da je površina trokuta jednaka površini četverokuta sa stranicama 14 i 6 [6]

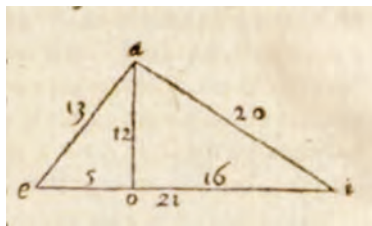
Ovaj je postupak zagonetan jer podrazumijeva poznavanje visine ($ad = 12$), koju Pacioli računa kasnije ali se njome NE KORISTI za određivanje površine [6].

Drugi postupak [6] je reprodukcija Heronova verbalnog algoritma koji se temelji na poznavanju duljina svih stranica (slika 11).



Slika 11. Fragment teksta koji opisuje Heronov postupak za trokut 15, 14 i 13 [6]

Pierre de la Ramée ili Peter Ramus (1515. – 1572.) bio je francuski humanist, pedagog i matematičar. Njegovi aritmetički i geometrijski rukopisi objavljeni su u Baselu nakon njegove smrti [12]. Ramusov postupak nalaženja površine raznostraničnog trokuta (13, 21 i 20) zgodno je spomenuti jer se taj "novi" trokut ne dobiva kao razlika, nego kao zbroj (slika 12) već spomenutih trokuta (5, 12, 13) i (16, 12, 20).



Slika 12. Ramusov trokut (13, 16, 20) je zbroj trokuta (5, 12, 13) i (16, 12, 20) [12]

Ramus, kao i Tartaglia, ne upotrebljava Heronovu formulu za računanje površine. Koristi se prvim euklidskim Heronovim postupkom:

- Nalazi zbroj kvadrata stranica 20 i 21 i dobiva 841.
- Od tog broja oduzima kvadrat stranice 13 i dobiva 672.
- Polovina od tog broja je 336. Kada se podijeli brojem 21, dobiva se 16. To je duljina dužine oi .
- Duljina dužine co je, naravno, 5.
- Kvadrat visine ao je 144 ($13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144$), pa je sama visina ao jednaka 12.

Ramus navodi da je površina trokuta jednaka polovini površine pravokutnika sa stranicama 21 i 12. Kako je površina tog pravokutnika 252, tražena površina trokuta je 126.

Raspoloživi prostor ne dozvoljava navođenje postupaka ostalih matematičara u XVI. i XVII. stoljeću koji su u velikoj većini nalazili površinu trokuta s cjelobrojnim stranicama, visinom i površinom (trokut 13, 14 i 15; trokut 26, 28 i 30 ili neki drugi) na dva načina:

- 1) Korištenjem poluumnoška stranice 14 i visine 12, uz prethodno nalaženje segmenata 5 i 9 na koje visina dijeli stranicu 14.
- 2) Korištenjem, bez spominjanja autorstva, Heronova postupka u kojem nije potrebno poznavati duljinu visine.

Međutim, važno je napomenuti da su neka svojstva trokuta korištenih u Heronovim primjerima kasnije privukla pažnju istraživačkih matematičara u teoriji brojeva u kojoj je čak nastala posebna grana "Heronovi trokuti".

Heronovi trokuti i neke zanimljive podvrste

Heronovi trokuti definiraju se kao raznostranični trokuti s cjelobrojnim stranicama i cjelobrojnou površinom [9]. Heron je upotrijebio dva primjera tih trokuta: trokut sa stranicama duljina 13, 14 i 15 (površina 84) i trokut sa stranicama 11, 13 i 20 (površina 66). Međutim, trokut 7, 8 i 9, kojim se koristio za ilustraciju svog postupka nalaženja površine bez računanja visine nije Heronov trokut.

Značajna podvrsta Heronovih trokuta su "Pitagorini trokuti" čije stranice zadovoljavaju Pitagorini poučak. Heron spominje eksplicitno dva primjera: trokut sa stranicama duljina 3, 4 i 5 te trokut sa stranicama duljina 6, 8 i 10.

Stranice trokuta 3, 4 i 5 su uzastopni cijeli brojevi, kao i kod Heronova trokuta 13, 14 i 15. Sljedeći primjeri su: trokut sa stranicama duljina 51, 52 i 53 (površina 1170) i trokut sa stranicama duljina 193, 194 i 195 (površina 16 296). Dokazano je da je broj Heronovih trokuta čije su stranice uzastopni cijeli brojevi beskonačan. Međutim, postoji samo 10 takvih trokuta čije su duljine stranica manje od 1 000 000.

Pitagorini trokuti (6, 8 i 10) i (5, 12, 13), kojima se koristio Heron imaju zanimljivo svojstvo, opseg im je jednak površini. Prvi ima opseg i površinu 24, a drugi 30. Whitworth (1903.) je dokazao da od beskonačnog broja Heronovih trokuta samo tri imaju opseg koji je jednak površini. To su trokuti sa stranicama duljina 6, 25 i 29, zatim 7, 15 i 20 te 9, 10, 17.

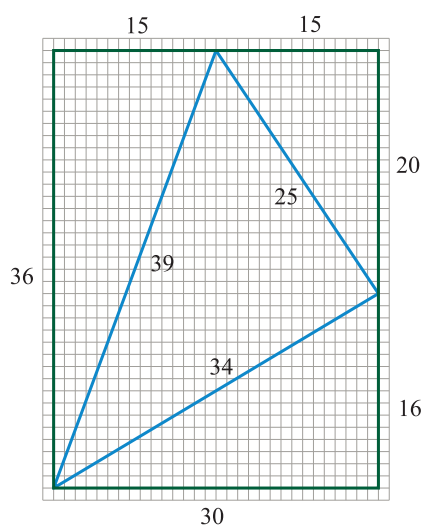
Heronov trokut (13, 14 i 15) može se rastaviti na dva Pitagorina trokuta (5, 12, 13) i (9, 12, 15). Ramusov trokut (21, 13, 20) je, također, zbroj dvaju

Pitagorinih trokuta (5, 12, 13) i (16, 12, 20). Prirodno je bilo generalizirati to svojstvo na sve Heronove trokute. Međutim, Cheney je dokazao da je takva generalizacija pogrešna: Heronov trokut (25, 34, 39) ne može se prikazati kao zbroj dvaju Pitagorinih trokuta pa se smatra "nerastavljivim". Koristeći se računalnim programom, Paul Yui je pokazao da postoje čak 24 Heronova "nerastavljiva" trokuta sa stranicama duljine do 100, koji nisu zbroj dvaju Pitagorinih trokuta.

Isti je autor uskoro pokazao da se Heronovi trokuti mogu ucrtati na mrežu koju čine jedinični kvadrati, tako da se tri vrha trokuta nađu na obodu odgovarajućeg pravokutnika [14]. Za slučaj Heronova "nerastavljiva trokuta" (25, 34, 39), Yui navodi da njegovi vrhovi imaju koordinate (0, 0), (30, 16) i (15, 36). Slika 13 prikazuje taj trokut na mreži 30×36 .

Strick [10] je ukazao na važnu činjenicu: Trokut (25, 34, 39) dobiva se kada se od pravokutnika 30×36 "oduzmu" tri Pitagorina trokuta: (15, 20, 25), (16, 30, 34) i (15, 36, 39).

Njegova površina je, u skladu s tim, jednaka: $30 \cdot 36 - 15 \cdot 10 - 16 \cdot 15 - 15 \cdot 18 = 1080 - 150 - 240 - 270 = 420$. Isti rezultat dobiva se i primjenom Heronove formule.



Slika 13. "Rešetkasti" prikaz "nerastavljiva" Heronova trokuta (25, 34, 39)

U slučaju "rastavljivih" Heronovih trokuta alternativni postupak računanja površine vodi do **zbiranja** površina dvaju Pitagorinih trokuta. Kada su u pitanju "nerastavljivi" Heronovi trokuti, alternativa korištenju Heronove formule je **oduzimanje** površina triju Pitagorinih trokuta od površine odgovarajućeg pravokutnika.

Nastava matematike bit će učenicima znatno zanimljivija ako im se, umjesto samog korištenja Heronove formule za računanje površina trokuta s proizvoljnim duljinama stranica, na razne didaktičke načine približe spomenuta i ostala zanimljiva svojstva Heronovih trokuta (na primjer, opseg im je parni broj, a površina svakog od tih trokuta djeljiva je brojem 6).

LITERATURA

- 1/ F. Acerbi, B. Vitrac (2014.): *Metrica Héron d'Alesandrie*, Fabrizio Serra Editore.
- 2/ E. M. Bruins (urednik) (1964.): *Codex Constantinopolitanus. Part three*, Translation and commentary. E. J. Brill.
- 3/ T. L. Heath (1908.): *Euclid The thirteen books of the Elements*, Second edition unabridged. Cambridge University Press.
- 4/ B. Hughes (urednik) (2008.): *Fibonacci's De Practica Geometrie*, Springer.
- 5/ A. Marre (1866.): *Le messahat de Mohammed Ben Moussa al Kharezmi. Extrait de son algebre*, Imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques.
- 6/ L. Pacioli (1494.): *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et propotionalita*, Paganini.
- 7/ J. Paić-Antunović, V. Vlahović-Štetić (2011.): The effect of feedback on the intensity of the illusion of linearity in high-school students' solving of geometry problems, *Review of psychology*, 18(1), 23-32.
- 8/ M. Cantor (1875.): *Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst*, B. G. Teubner.
- 9/ M. Pavković (2006.): Heronovi trokuti, *Matka* 57, 10-11.
- 10/ H. K. Strick (2021.): *Mathematics is beautiful*, Springer.
- 11/ W. A. Whitworth (1903.): Solution of the problem 15288, *The Education Times*, LVI (509), 399.
- 12/ P. Ramus (1580.): *Arithmeticae Libri Duo Geometriae Septem Et Viginti*, Eusebium Episcopium and Nicolai Fratrís Heredes.
- 13/ W. F. Cheney (1929.): Heronian triangle, *American Mathematical Monthly*, 36(1), 22 - 28.
- 14/ P. Yui (2001.): Heronian Triangles Are Lattice Triangles, *American Mathematical Monthly*, 108 (3), 261 - 263.
- 15/ P. Yui (1998.): Construction of indecomposables Heronian triangles, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 28(3), 1180 - 1202.