

Potencija točke i radikalna os

Lana Frkin, Samobor

Nakon što smo se u prošlim geometrijskim člancima [1] i [2] dotaknuli osnova geometrije kao što su kružnica, središnji i obodni kut, tetivni četverokut i sličnost trokuta, sada možemo ući u specifičnije teme, kao što su potencija točke i radikalna os. Potencija točke ne zahtijeva nikakvo posebno predznanje osim osnova geometrije. Stoga je dobra tema za osnovnoškolce koji žele naučiti nešto više o geometriji. Radikalna os je malo zahtjevnija i premda su primjeri objašnjeni u detalje tako da se i bez predznanja može razumjeti, za rješavanje zadataka potrebno je više iskustva.

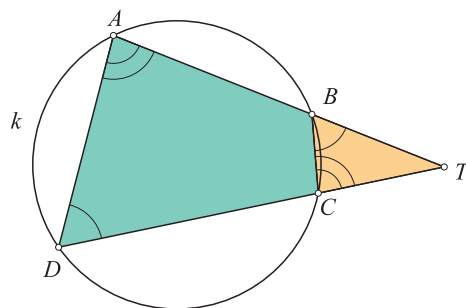
Potencija točke u odnosu na kružnicu

Promotrimo najprije uvodni primjer.

Primjer 1. Dani su točka T i kružnica k . Kroz točku T povučena su dva pravca koja sijeku danu kružnicu u točkama A i B , odnosno C i D . Dokažite da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.

Rješenje: Da bismo to dokazali, trebat ćemo uočiti jedan tetivni četverokut i par sličnih trokuta. Za početak, ako se točka T nalazi na kružnici, obje strane gornje jednakosti jednake su 0 pa jednakost stoga vrijedi.

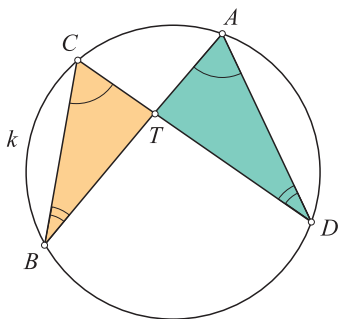
Pretpostavimo da se točka T nalazi izvan kružnice k (slika 1). Točke A, B, C i D su vrhovi četverokuta.



Slika 1.

$180^\circ - \angle BCD = \angle TCB$. Sada primjećujemo da trokuti $\triangle TAD$ i $\triangle TCB$ imaju zajednički kut pri vrhu T te su kutovi $\angle DAT$ i $\angle TCB$ sukladni. Prema KK poučku o sličnosti trokuta slijedi da su ta dva trokuta slična pa imamo $\frac{|TA|}{|TD|} = \frac{|TC|}{|TB|}$, tj. $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.

S druge strane, ako se točka T nalazi unutar kružnice k (slika 2), prema poučku o središnjem i obodnom kutu vrijedi $\angle BAD \cong \angle BCD$ te $\angle ABC \cong \angle ADC$. Stoga su prema KK poučku o sličnosti trokuta i u ovom slučaju trokuti $\triangle TAD$ i $\triangle TCB$ slični te vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$. Time smo dokazali traženu jednakost.

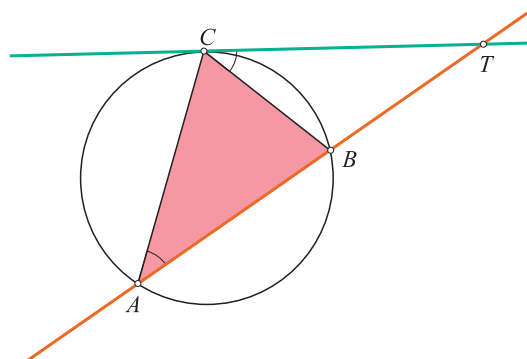


Slika 2.

Za rješavanje sljedećeg primjera moramo se prisjetiti prvog primjera iz [1], poučka o kutu tangente i tetive: kut između tetive kružnice i tangente na tu kružnicu u jednoj od krajnjih točaka tetive sukladan je obodnom kutu nad tom tetivom. Ako se učenici nisu susreli s tim poučkom, to može biti dobar za-datak za vježbu.

Primjer 2. Vrhom C trokuta $\triangle ABC$ povučena je tangenta na opisanu kružnicu tog trokuta. Neka je T sjecište pravca AB i te tangente. Dokažite da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$.

Rješenje: Označimo na skici kutove za koje znamo da su sukladni (slika 3). Iz poučka o kutu tangente i tetive (vrlo bitan poučak!) znamo da su kutovi $\angle BCT$ i $\angle TAC$ sukladni. Sada možemo primijetiti da su trokuti $\triangle TCB$ i $\triangle TAC$ slični prema KK poučku jer imaju dva sukladna kuta. Iz toga slijedi $\frac{|TB|}{|TC|} = \frac{|TC|}{|TA|}$ to jest $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$.



Slika 3.

Sada smo spremni za definiciju potencije točke u odnosu na kružnicu.

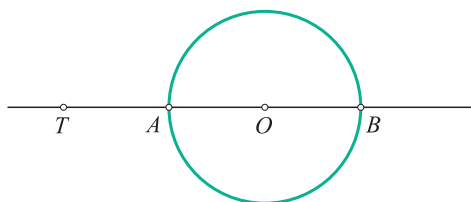
Definicija. Neka je k kružnica sa središtem O i polumjerom duljine r i neka je T točka u ravni. **Potencija točke T u odnosu na kružnicu k** je broj $|OT|^2 - r^2$.

Potencija točke u odnosu na kružnicu definirana je za bilo koju točku ravnine. Vidimo da je potencija točke pozitivna ako se točka nalazi izvan kružnice, a negativna ako je unutar kružnice. Ako je točka na kružnici, potencija točke u odnosu na kružnicu iznosi 0.

Primjer 3. Neka je k kružnica sa središtem O , a T točka u ravni koja se ne nalazi na kružnici. Povucimo pravac p koji prolazi točkama T i O . Označimo s A i B točke u kojima se k i p sijeku. Dokažite da je potencija točke T u odnosu na kružnicu k jednaka $|TA| \cdot |TB|$ ako je točka T izvan kružnice, odnosno $-|TA| \cdot |TB|$ ako je točka T unutar kružnice.

Rješenje: Označimo s r duljinu polumjera kružnice k . Promotrimo dva slučaja:

1. slučaj: Točka T nalazi se izvan kružnice k .



Slika 4.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da se A nalazi između točaka B i T . Primijetimo da vrijedi

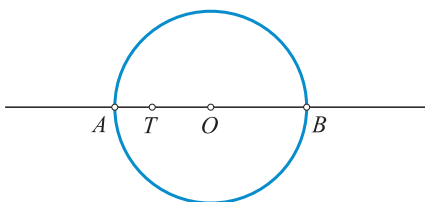
$$|TA| = |TO| - |OA| = |OT| - r,$$

$$|TB| = |TO| + |OB| = |OT| + r.$$

Zato je

$$|TA| \cdot |TB| = (|OT| - r) \cdot (|OT| + r) = |OT|^2 - r^2.$$

2. slučaj: Točka T nalazi se unutar kružnice k .



Slika 5.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da se T nalazi između točaka A i O . Primijetimo da vrijedi

$$|TA| = r - |OT| \text{ i } |TB| = r + |OT|.$$

Zato je

$$\begin{aligned} |TA| \cdot |TB| &= (r - |OT|) \cdot (r + |OT|) \\ &= r^2 - |OT|^2 \end{aligned}$$

pa je

$$|OT|^2 - r^2 = -|TA| \cdot |TB|.$$

Time je dokazana tvrdnja, no nastavimo. Povucimo neki drugi pravac kroz T koji siječe kružnicu k u točkama C i D .

Sada, prema primjeru 1. zaključujemo da je $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$, a to je prema primjeru 3 jednako apsolutnoj vrijednosti potencije točke T u odnosu na kružnicu k .

Primijetimo još i ovo: ako se točke C i D podudaraju, tj. ako je povučeni pravac iz točke T tangenta na kružnicu s diralištem u točki C , potencija točke T u odnosu na tu kružnicu iznosi $|TC|^2$.

Slijede primjeri na kojima ćemo pokazati najbitnija svojstva potencije točke.

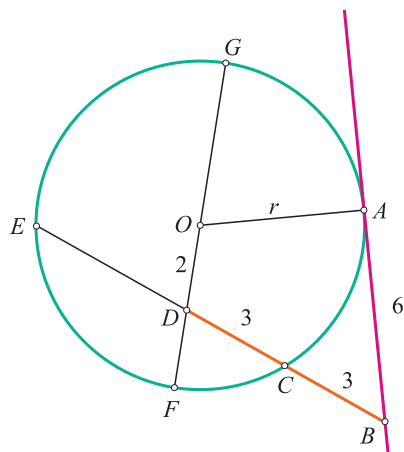
Primjer 4. Neka je $ABCD$ četverokut i neka je točka T sjecište pravaca AB i CD . Ako vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$, dokažite da je četverokut $ABCD$ tetivan.

Rješenje: Kada pročitamo ovaj zadatak, vjerojatno je prvo pitanje koje si postavimo kako dokazati da je četverokut tetivan. Odgovor na to pitanje je zapravo vrlo jednostavan. Znamo da ako je zbroj veličina nasuprotnih kutova u četverokutu 180° , četverokut je tetivan.

Kada nacrtamo skicu, možemo vidjeti da imamo nešto vrlo slično primjeru 1. te pogledamo sliku 1 (možemo pretpostaviti da je B između T i A). Ako pokažemo da je npr. kut $\angle TCB$ sukladan kutu $\angle DAT$, pokazali smo da je kut $\angle BCD = 180^\circ - \angle DAT$, iz čega bi slijedila tetivnost tog četverokuta. Sada se možemo pitati kako pokazati da su dva kuta sukladna. Danu jednakost $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$ možemo zapisati kao jednakost omjera nekih dužina, pa bi dobra strategija bila to iskoristiti da dokažemo sličnost nekih trokuta. Trokuti koji ovdje mogu biti slični su $\triangle TAD$ i $\triangle TCB$. Iz $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$ slijedi $\frac{|TA|}{|TC|} = \frac{|TD|}{|TB|}$. Ti trokuti imaju zajednički kut s vrhom T pa su trokuti slični. Odatle slijedi $\angle DAT \cong \angle TCB$, iz čega, kao što smo vidjeli slijedi da je četverokut $ABCD$ tetivan.

Primjer 5. Dana je kružnica sa središtem u točki O . Neka je A točka na kružnici, B točka na tangenti na kružnicu u točki A , a D točka unutar kružnice takva da dužina $\overline{BD}$ siječe kružnicu u točki C . Ako je $|BC| = |DC| = 3$, $|OD| = 2$ i $|AB| = 6$, koliko iznosi površina kruga omeđenog zadanom kružnicom?

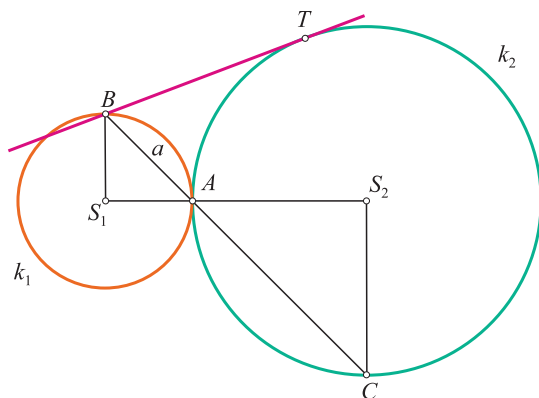
Rješenje: Da izračunamo površinu kruga, potreban nam je polumjer. Ovdje ćemo polumjer izračunati uz pomoć potencije točke. Jedan trik kojim se često koristimo u zadacima s potencijom točke jest produljivanje dužina do sjecišta s kružnicom tako da možemo iskoristiti potenciju točke. U ovom zadatku to ćemo primijeniti na dužine $\overline{BD}$ i $\overline{OD}$. Neka je E druga točka u kojoj pravac BD siječe kružnicu, a F i G točke u kojima ju siječe pravac OD .



Slika 6.

Imamo $|OF| = |OG| = |OA| = r$. Iz toga znamo da vrijedi: $|DG| = r + 2$ i $|DF| = r - 2$, jer je $|OD| = 2$. Sada možemo iskoristiti potenciju točke. Za potenciju točke B u odnosu na kružnicu vrijedi: $|BC| \cdot |BE| = |BA|^2$, odakle je $|BE| = 12$. Iz toga slijedi da je $|DE| = 6$. Ako promotrimo potenciju točke D , dobivamo: $|DE| \cdot |DC| = |DF| \cdot |DG|$. Ako uvrstimo već dobiveno, iz $6 \cdot 3 = (r - 2) \cdot (r + 2)$ slijedi $r^2 = 22$, što znači da je površina kruga $P = r^2 \cdot \pi = 22\pi$.

Primjer 6. Kružnice k_1 i k_2 , polumjera r_1 i r_2 , dodiruju se izvana u točki A . Na kružnici k_1 odabrana je točka B , a točka T je diralište kružnice k_2 i tangente na tu kružnicu povučene iz točke B . Izrazite $|BT|$ polumjerima r_1 i r_2 te duljine $a = |AB|$.



Slika 7.

Rješenje: Primijenimo sličan trik kao i u prethodnom zadatku. Pogledajmo skicu (slika 7) koju smo nacrtali i pokušajmo pronaći dužinu koju možemo produžiti kako bismo iskoristili potenciju točke.

Dužina $\overline{BA}$ je dobar kandidat jer u tom slučaju možemo iskoristiti potenciju točke B u odnosu na kružnicu k_2 . Nazovimo drugu točku u kojoj pravac BA siječe k_2 točkom C . Iz potencije točke B u odnosu na kružnicu k_2 dobivamo:

$$|BT|^2 = |BA| \cdot |BC| = a \cdot (a + |AC|).$$

Dakle, trebamo izraziti $|AC|$ s pomoću r_1 , r_2 i a . Neka su S_1, S_2 redom središta kružnica k_1 i k_2 . Promotrimo trokute $\triangle AS_1B$ i $\triangle AS_2C$. Oba su trokuta jednakokračna, a kut pri vrhu A im je zajednički. Iz toga prema KK-poučku o sličnosti trokuta slijedi da su slični. Dakle, $\frac{r_1}{a} = \frac{r_2}{|AC|} \Leftrightarrow |AC| = a \cdot \frac{r_2}{r_1}$.

Uvrštavanjem dobivamo $|BT|^2 = a \cdot \left(a + a \cdot \frac{r_2}{r_1}\right)$,

pa je rješenje $|BT| = a \cdot \sqrt{1 + \frac{r_2}{r_1}}$.

Primjer 7. Dan je trokut $\triangle ABC$ i točka T na pravcu AB , koja nije između A i B , takva da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$. Dokažite da je pravac TC tangenta na kružnicu opisanu trokutu $\triangle ABC$.

Rješenje: Ovo ćemo dokazati tako da pretpostavimo suprotno i dodemo do kontradikcije. Dakle, pretpostavimo da pravac TC siječe opisanu kružnicu u još jednoj točki koju označimo s D .

Iz potencije točke T na tu kružnicu imamo: $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$, a iz uvjeta zadatka $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$. Dakle, $|TC|^2 = |TC| \cdot |TD|$ iz čega slijedi $|TC| = |TD|$. Ovo znači da su C i D ista točka, pa pravac TC siječe kružnicu u samo jednoj točki, što znači da je to tangenta na kružnicu.

Zadaci za vježbu

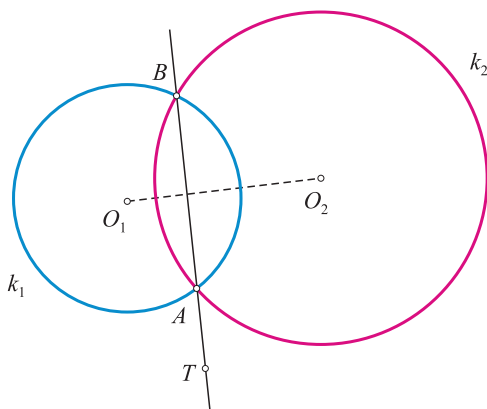
Zadatak 1. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut u kojem je $|AD| = |BD|$. Neka je M sjecište njegovih dijagonala, I središte kružnice upisane trokutu $\triangle BCM$ te N drugo sjecište pravca AC i kružnice opisane trokutu $\triangle BMI$. Dokažite da je $|AN| \cdot |CN| = |BN| \cdot |CD|$.

Zadatak 2. U šiljastokutnom trokutu $\triangle ABC$ (pri čemu je $|BC| > |AC|$) nožišta visina iz vrhova A i B su redom točke D i E . Pravac kroz A i polovište stranice $\overline{BC}$ siječe kružnicu opisanu trokutu $\triangle ABC$ u točki N . Kružnica opisana trokutu $\triangle ADN$ siječe pravac BC u točkama D i G . Neka je F točka u ravnini takva da je četverokut $EBFC$ pravokutnik. Dokažite da točke G, C, N i F leže na istoj kružnici.

Radikalna os

Primjer 8. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se sijeku u točkama A i B . Dokažite da sve točke pravca AB imaju jednaku potenciju u odnosu na obje kružnice.

Rješenje: Uzmimo neku točku T koja se nalazi na pravcu AB (slika 8).



Slika 8.

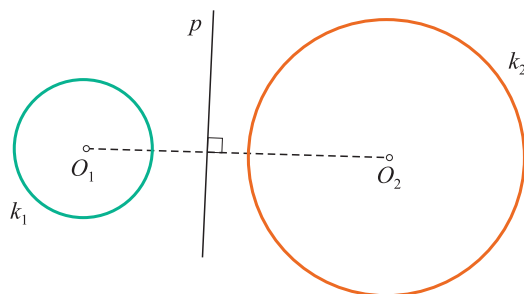
Ako je točka T izvan kružnica k_1 i k_2 , tad je njezina potencija u odnosu na kružnicu k_1 jednaka $|TA| \cdot |TB|$ jer su $A, B \in k_1$.

Budući da je $A, B \in k_2$, potencija točke T u odnosu na kružnicu k_2 iznosi također $|TA| \cdot |TB|$ pa je tvrdnja istinita. Ako je točka T unutar kružnica k_1 i k_2 , tada je njezina potencija u odnosu na obje kružnice $-|TA| \cdot |TB|$ i u tom slučaju tvrdnja je istinita.

Definicija. Dane su dvije nekoncentrične kružnice u ravnini. Njihova **radikalna os** ili **potencijala** je skup svih točaka koje imaju jednaku potenciju u odnosu na obje kružnice.

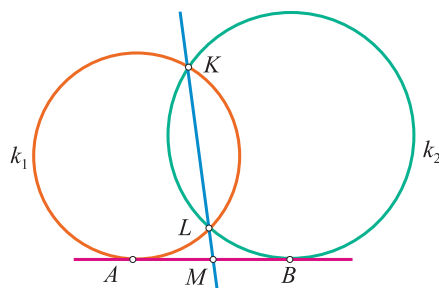
Prethodni primjer pokazuje da u slučaju kružnica koje se sijeku sve točke pravca kroz njihova sjecišta pripadaju radikalnoj osi, no nismo dokazali da su samo te točke na radikalnoj osi.

Može se dokazati da je skup točaka koje imaju jednaku potenciju u odnosu na dvije nekoncentrične kružnice uvijek pravac okomit na spojnicu središta kružnica (čak i ako se kružnice ne sijeku). Dokaz možete naći u [Palman, str. 18-20].



Slika 9.

Primjer 9. Dane su kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku u točkama K i L te njihova zajednička tangenta koja ih dodiruje u točkama A i B , tim redom. Neka je M sjecište pravaca AB i KL . Dokažite da je $|AM| = |BM|$.

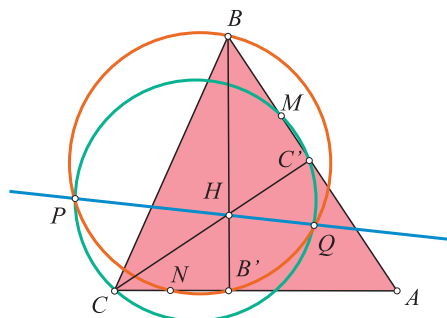


Slika 10.

Rješenje: Znamo da je pravac KL radikalna os tih dviju kružnica. To znači da je potencija svake točke na tom pravcu na tim dvjema kružnicama jednaka. No, potencija točke M je jednaka $|MB|^2$ na jednu kružnicu i $|MA|^2$ na drugu. Te dvije potencije su jednake, pa je $|MB| = |MA|$.

Primjer 10. Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan trokut s ortocentrom H , a M i N proizvoljne točke redom na dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Kružnice s promjerima $\overline{BN}$ i

$\overline{CM}$ sijeku se u točkama P i Q . Pokažite da su točke P, Q i H kolinearne (tj. da leže na istom pravcu).



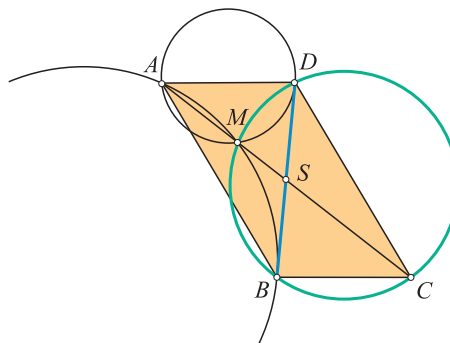
Slika 11.

Rješenje: Označimo s B', C' redom nožišta visina iz vrhova B, C u trokutu $\triangle ABC$. Četverokut $BCB'C'$ je tetivan jer su $\angle BC'C$ i $\angle BB'C$ pravi kutovi (točke B' i C' su na kružnici kojoj je $\overline{AB}$ promjer). Iz primjera 1 znamo da je $|HB||HB'| = |HC||HC'|$. Kružnica promjera $\overline{BN}$ sadrži točku B' jer je kut $\angle BB'N$ pravi. Iz tog razloga je $|HB||HB'|$ potencija točke H u odnosu na kružnicu promjera $\overline{BN}$ (jer ta kružnica sadrži i B i B'). Na isti način zaključujemo da je $|HC||HC'|$ potencija točke H u odnosu na kružnicu promjera $\overline{CM}$. Dakle, točka H ima jednaku potenciju u odnosu na te dvije kružnice, iz čega slijedi da se H nalazi na njihovoj radikalnoj osi. Radikalna os tih kružnica je upravo pravac PQ , što znači da se H nalazi na pravcu PQ , čime je tvrdnja dokazana.

Primjer 11. Dan je paralelogram $ABCD$ takav da je $\angle CBA > 90^\circ$ i $|AC| > |BD|$. Opisana kružnica trokuta BCD siječe dijagonalu $\overline{AC}$ po drugi put u točki M . Dokažite da je pravac BD zajednička tangenta kružnica opisanih trokutima $\triangle ABM$ i $\triangle ADM$.

Rješenje: Označimo sa S sjecište dijagonala paralelograma. Četverokut $BCDM$ je tetivan jer je M na kružnici opisanoj trokutu BCD . Koristimo se potencijom točke S na tu kružnicu: $|SB| \cdot |SD| = |SM| \cdot |SC|$. Znamo da se dijagonale paralelograma raspolavljaju, dakle $|SB| = |SD|$ i $|SA| = |SC|$. Zato je $|SM| \cdot |SA| = |SD|^2$. Promotrimo potenciju točke S u odnosu na kružnicu opisanu trokutu $\triangle ADM$, iz toga možemo zaključiti da je pravac SD tangenta na tu kružnicu u točki D (koristimo se tvrdnjom dokazanom u primjeru 7.). Analogno, iz

$|SA| \cdot |SM| = |SB|^2$ zaključujemo da je pravac SB tangenta kružnice opisane trokutu $\triangle ABM$ u vrhu B . Dakle, pravac BD je zajednička tangenta tih dviju kružnica.



Slika 12.

Zadatci za vježbu

Zadatak 3. Dane su tri kružnice k_1, k_2 i k_3 te pravci s_1, s_2 i s_3 koji su redom radikalne osi parova kružnica $(k_2, k_3), (k_3, k_1)$ i (k_1, k_2) . Dokažite da su s_1, s_2 i s_3 paralelni pravci ako su središta danih kružnica kolinearna, a u suprotnom prolaze istom točkom. Ta točka zove se **radikalno središte**.

Zadatak 4. Upisana kružnica trokuta $\triangle ABC$ sa središtem u točki I dira stranice $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$ redom u točkama D, E, F . Neka pravac AI siječe kružnicu opisanu trokutu $\triangle ABC$ u točkama A i M . Tangenta u točki M na opisanu kružnicu trokuta $\triangle ABC$ siječe pravce AC i AB redom u točkama K i L . Dokažite da točka D leži na radikalnoj osi kružnica opisanih trokutima $\triangle EIK$ i $\triangle FIL$.

Teži zadatci

Zadatak 5. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se ne sijeku. Dokažite da je geometrijsko mjesto središta kružnica koje su ortogonalne na njih njihova radikalna os. (Dvije su kružnice ortogonalne ako se sijeku i tangente povučene na te kružnice u njihovom sjecištu su međusobno okomite.)

Zadatak 6. Neka su A, B, C i D točke na istom pravcu tim redoslijedom. Kružnice promjera $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točkama X i Y . Neka je P točka na pravcu XY koja se ne nalazi na pravcu AB te

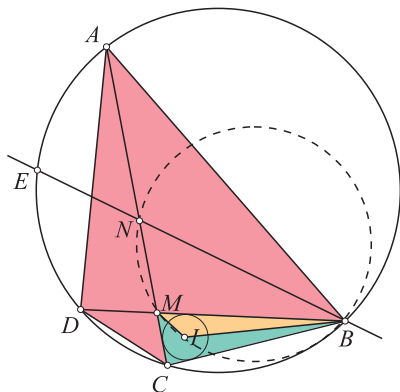
neka su M i N redom sjecišta pravaca CP i BP s kružnicama promjera $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Dokažite da se pravci AM , DN i XY sijeku u jednoj točki.

Zadatak 7. Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan trokut s ortocentrom H i D točka na stranici $\overline{BC}$. Neka su E i F redom nožišta visina iz vrhova B i C , a točka X takva da je $\overline{DX}$ promjer kružnice k_1 opisane trokutu $\triangle DCE$. Analogno neka je k_2 kružnica opisana trokutu $\triangle BDF$ i neka je Y točka takva da je $\overline{DY}$ promjer kružnice k_2 . Dokažite da su točke X , Y i H kolinearne.

Rješenja zadataka za vježbu

1. Neka je E drugo sjecište pravca BN i kružnice opisane četverokutu $ABCD$. Uočimo da će tvrdnja biti dokazana dokažemo li da je četverokut $ENCD$ paralelogram jer je tad $|CD| = |EN|$ pa tvrdnja slijedi iz $|AN| \cdot |CN| = |BN| \cdot |EN|$. Označimo $\sphericalangle DAB = \alpha$. Tada vrijede sljedeće relacije za kutove:

$$\begin{aligned}\sphericalangle DEB &= \sphericalangle DAB = \alpha & (\text{obodni kutovi}) \\ \sphericalangle ABD &= \sphericalangle DAB = \alpha & (\triangle ABD \text{ je jednakokračan}) \\ \sphericalangle ACD &= \sphericalangle ABD = \alpha & (\text{obodni kutovi}) \\ \sphericalangle BDA &= 180^\circ - 2\alpha & (\text{kutovi u } \triangle ABD) \\ \sphericalangle ACB &= \sphericalangle ADB = 180^\circ - 2\alpha & (\text{obodni kutovi}) \\ \sphericalangle MIB &= 90^\circ + \frac{\sphericalangle MCB}{2} = 180^\circ - \alpha \\ &(\text{kut u središtu upisane kružnice u } \triangle MCB) \\ \sphericalangle MNB &= \alpha & (\text{četverokut } IBNM \text{ je tetivan}).\end{aligned}$$

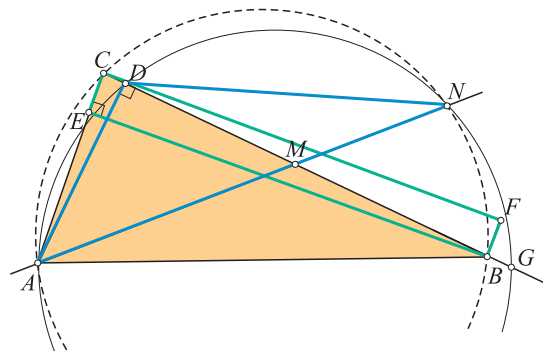


Slika 13.

Dakle, $\sphericalangle NED = \sphericalangle BNC = \sphericalangle NCD = \alpha$, pa je četverokut $ENCD$ zaista paralelogram, što je i trebalo dokazati.

2. Neka je M polovište $\overline{BC}$ (slika 14). Zato što je četverokut $EBFC$ pravokutnik te budući da su četverokuti $ABNC$ i $AGND$ tetivni, vrijedi

$$|ME| \cdot |MF| = |MB| \cdot |MC| = |MA| \cdot |MN| = |MD| \cdot |MG|.$$



Slika 14.

Iz jednakosti $|ME| \cdot |MF| = |MA| \cdot |MN|$ zaključujemo da je četverokut $EAFN$ tetivan, a iz jednakosti $|ME| \cdot |MF| = |MD| \cdot |MG|$ slijedi da je četverokut $EGFD$ tetivan.

U opisanoj kružnici trokuta ABC kutovi $\sphericalangle BCN$ i $\sphericalangle BAN$ su obodni kutovi nad istim lukom $\widehat{BN}$ pa je $\sphericalangle BCN = \sphericalangle BAN$. Ujedno vrijedi i $\sphericalangle BAN = \sphericalangle BAC - \sphericalangle NAC = \alpha - \sphericalangle NAC$.

U kružnici koja sadrži točke E , A , F , N kutovi $\sphericalangle NAE$ i $\sphericalangle NFE$ su obodni kutovi nad lukom $\widehat{NE}$ pa je $\sphericalangle NAE = \sphericalangle NFE$.

U kružnici koja sadrži točke E , G , F i D kutovi $\sphericalangle EFG$ i $\sphericalangle EDG$ su obodni kutovi nad lukom $\widehat{EG}$ pa su jednake veličine, tj. $\sphericalangle EFG = \sphericalangle EDG$.

Budući da su kutovi $\sphericalangle AEB$ i $\sphericalangle ADB$ pravi kutovi nad istom dužinom $\overline{AB}$, prema obratu Talesova teorema o pravom kutu nad promjerom kružnice slijedi da je $\overline{AB}$ promjer kružnice kojoj pripadaju točke E i D . Drugim riječima, četverokut $ABDE$ je tetivni te za njegove kutove vrijedi: $\alpha + \sphericalangle EDB = 180^\circ$, uz oznaku $\alpha = \sphericalangle BAG$.

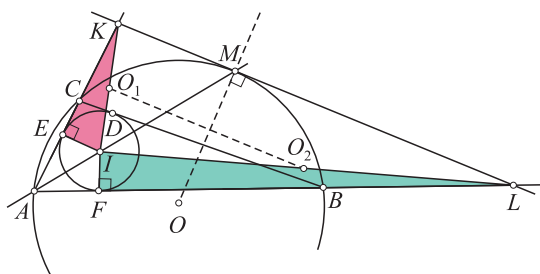
Koristeći se svim gore navedenim imamo ovaj niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
 \sphericalangle GCN &= \sphericalangle BCN = \sphericalangle BAN = \alpha - \sphericalangle NAC \\
 &= \alpha - \sphericalangle NAE = \alpha - \sphericalangle NFE \\
 &= \alpha - (\sphericalangle NFG - \sphericalangle EFG) \\
 &= \alpha - \sphericalangle NFG + \sphericalangle EFG \\
 &= \alpha - \sphericalangle NFG + \sphericalangle EDG \\
 &= \alpha - \sphericalangle NFG + \sphericalangle EDB \\
 &= 180^\circ - \sphericalangle NFG.
 \end{aligned}$$

Dakle, $\sphericalangle GCN = 180^\circ - \sphericalangle NFG$, a to znači da je četverokut $CGFN$ tetivan, tj. te četiri točke pripadaju jednoj kružnici što je i trebalo dokazati.

3. Uputa: ako su središta svih triju kružnica kolinearna, onda su radikalne osi paralelne jer su to pravci koji su okomiti na pravac na kojemu ta središta leže. Pretpostavimo da središta nisu kolinearna. Tada se radikalne osi parova kružnica (k_1, k_2) i (k_2, k_3) moraju sjeći u nekoj točki T . No, tada točka T ima jednaku potenciju na sve tri kružnice k_1, k_2, k_3 pa mora ležati i na radikalnoj osi para (k_3, k_1) .

4. Neka su k_1 i k_2 redom kružnice opisane trokutima $\triangle EIK$ i $\triangle FIL$, te neka je p njihova radikalna os.



Slika 15.

Budući da se kružnice sijeku u I , pravac p prolazi točkom I . Trokuti $\triangle EIK$ i $\triangle FIL$ su pravokutni, pa su središta O_1 i O_2 njihovih opisanih kružnica polovišta dužina $\overline{KI}$ i $\overline{LI}$ (slika 15). Ujedno, dužina $\overline{O_1O_2}$ je srednjica trokuta $\triangle IKL$, tj. $\overline{O_1O_2} \parallel \overline{KL}$. Vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned}
 D \in p &\iff p = DI \iff DI \perp O_1O_2 \\
 &\iff O_1O_2 \parallel BC \text{ (jer } DI \perp BC) \\
 &\iff BC \parallel KL.
 \end{aligned}$$

Potrebno je, dakle, dokazati da je tangenta KL paralelna sa BC . Prvo zamijetimo da je točka M na simetrali stranice $\overline{BC}$.

Naime, AI (odnosno AM) je simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ pa su $\widehat{CM}$ i $\widehat{MB}$ kružni lukovi sa sukladnim obodnim kutovima. Stoga su ti lukovi sukladni pa je $|CM| = |MB|$, što znači da točka M pripada simetrali dužine $\overline{BC}$. Posebno, OM je simetrala dužine $\overline{BC}$. Budući da je tangenta KL tangenta opisane kružnice upravo u diralištu M , ona je okomita na pridruženi polumjer, tj. na $\overline{OM}$. To znači da je KL okomita na simetralu stranice $\overline{BC}$, tj. paralelna je sa stranicom $\overline{BC}$ što je i trebalo dokazati.

5. Rješenje ovog zadatka detaljno je objašnjeno u videolekcijama *Potencija točke i radikalna os - Zadatak 16 (1/2)* i *Potencija točke i radikalna os - Zadatak 16 (2/2)* na našem You Tube kanalu "MNM Marin Getaldić", vidjeti [5].

6. Ovaj je zadatak bio postavljen na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi 1995. godine te se njegovo rješenje nalazi na web-stranici https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/1995_IMO_Problems/Problem_1

7. Rješenje ovog zadatka može se naći na You Tube kanalu "MNM Marin Getaldić" pod naslovom *Potencija točke i radikalna os - Zadatak 18*, vidjeti [6].

LITERATURA

- 1/ L. Banović (2021.): Kružnice, *Matematika i škola*, 110 (232-239).
- 2/ T. Kranjec, I. Čorić (2022.): Sličnost trokuta, *Matematika i škola*, 117 (80-86).
- 3/ D. Palman (1994.): *Trokut i kružnica*, Element, Zagreb.
- 4/ *Potencija točke i radikalna os*, 22. online predavanje, Mladi nadaređni matematičari "Marin Getaldić", mnm.hr/online-predavanja.
- 5/ [youtube.com/watch?v=8qMwvngR_3E](https://www.youtube.com/watch?v=8qMwvngR_3E), [youtube.com/watch?v=9aH3YLwSQQ](https://www.youtube.com/watch?v=9aH3YLwSQQ)
- 6/ [youtube.com/watch?v=19vSQA09](https://www.youtube.com/watch?v=19vSQA09)

Zahvaljujem Luki Banoviću i Vlatku Crnkoviću čija su MNM predavanja iz Potencije točke i radikalne osi uvelike pomogla da nastane ovaj članak.