

Pitagorine trojke i kvadratni polinomi

Alija Muminagić, Danska

Prisjetimo se:

Za trojku prirodnih brojeva (a, b, c) kažemo da je Pitagorina trojka ako su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, tj. ako vrijedi:

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1)$$

Jednadžba (1) jedna je diofantska jednadžba, tj. jednadžba čija rješenja tražimo u skupu cijelih brojeva.

Primjerice, uređena trojka $(a, b, c) = (5, 12, 13)$ je Pitagorina jer vrijedi $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Promotrimo pravokutni trokut kod kojeg su duljine kateta $a = 5$, $b = 12$ i hipotenuza $c = 13$. Poluopseg tog trokuta je $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = 15$, a površina $P = \frac{1}{2}a \cdot b = 30$. Osim toga, vrijedi

$$s - a = 10, s - b = 3, s - c = 2.$$

Brojevi 30, 15, 13, 10, 3 i 2 pojavljuju se u kvadratnim polinomima $x^2 + 13x - 30$ i $x^2 - 13x + 30$. Zaista,

$$x^2 + 13x - 30 = (x + 15)(x - 2)$$

$$x^2 - 13x + 30 = (x - 10)(x - 3).$$

Zapravo, vrijedi općenito: ako Pitagorina trojka (a, b, c) odgovara pravokutnom trokutu s poluopsegom s i površinom P , tada je

$$x^2 + cx - P = (x + s)(x - (s - c)) \quad \text{i}$$

$$x^2 - cx + P = (x - (s - a))(x - (s - b)).$$

Dokažimo tu tvrdnju.



Primijenimo Vièteove formule na prvi polinom $(x + s)(x - (s - c))$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -s + s - c = -c \quad \text{i} \\ x_1 \cdot x_2 &= -s(s - c) = -\frac{1}{4} \cdot 2s(2s - 2c) \\ &= -\frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c) = \frac{1}{4}((a+b)^2 - c^2) \\ &= -\frac{1}{4}(\underbrace{a^2 + b^2}_{=c^2} - c^2 + 2ab) \\ &= -\frac{1}{4} \cdot 2ab = -\frac{1}{2}ab = -P. \end{aligned} \quad (2)$$

Dakle, vrijedi $(x + s)(x - (s - c)) = x^2 + cx - P$.

Primjenom Vièteovih formula na drugi polinom $(x - (s - a))(x - (s - b))$ dobivamo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= (s - a) + (s - b) = 2s - a - b = c \quad \text{i} \\ x_1 \cdot x_2 &= (s - a)(s - b) = \frac{P^2}{s(s - c)} = \frac{P^2}{P} = P, \end{aligned}$$

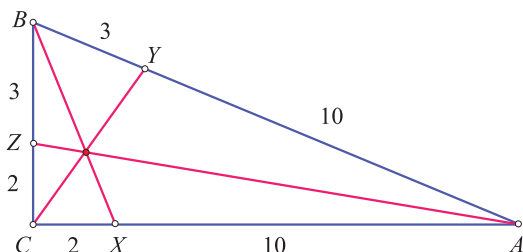
pri čemu smo u prethodnom retku iskoristili Heroнову formulu $P = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$ i (2). Time je tvrdnja dokazana i za drugi polinom. ■

Skicirajmo u pravokutnom trokutu s duljinama stranica 5, 12 i 13 veličine $s - a = 10$, $s - b = 3$, $s - c = 2$ ovako: nanesimo $s - c$ na obje katete počevši od vrha C i označimo $|CX| = s - c = 2$, $|CZ| = 2$ pri čemu je X na $\overline{AC}$, Z na $\overline{CB}$.

Tada je

$$\begin{aligned} |AX| &= b - 2 = 10 = s - a & \text{i} \\ |BZ| &= |BC| - 2 = 3 = s - b. \end{aligned}$$

I konačno, na hipotenuzu, od vrha B nanesimo $s - b = 3$. Dobivamo točku Y kao krajnju točku te nove dužine. Tada je $|AY| = c - 3 = 10 = s - a$. Dobivamo sljedeću sliku:



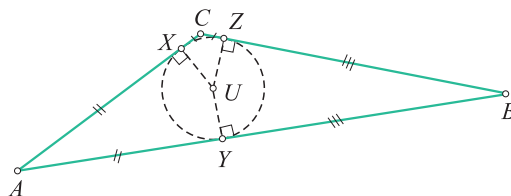
Očito vrijedi:

$$\frac{|CX|}{|XA|} \cdot \frac{|AY|}{|YB|} \cdot \frac{|BZ|}{|ZC|} = \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1.$$

Prema Cevinovu teoremu¹ pravci AZ , BX i CY prolaze jednom točkom.

Zanimljivo je da ova tvrdnja vrijedi u bilo kojem trokutu, a ne samo u ovom konkretnom sa stranicama duljine 5, 12, 13. Dokažimo ju.

Neka je točka U središte trokutu upisane kružnice te neka su X , Y , Z dirališta upisane kružnice sa stranicama $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ redom. Budući da je U na simetrali kuta $\angle ACB$, iz sukladnosti trokuta UXC i UZC slijedi da je $|CX| = |CZ|$. Analogno, $|AX| = |AY|$ i $|BZ| = |BY|$.

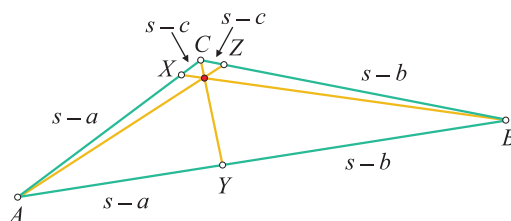


Budući da je opseg trokuta jednak zbroju duljina stranica, uz uvažavanje prethodnih jednakosti imamo:

$$\begin{aligned} 2s &= |AB| + |BC| + |CA| \\ &= |AY| + |YB| + |BZ| + |ZC| + |CX| + |XA| \\ &= 2|AY| + 2|YB| + 2|CX| \\ &= 2|AB| + 2|CX|, \end{aligned}$$

tj. $s = |AB| + |CX|$, $|CX| = s - c$.

Slično se dobije: $|AY| = s - a$ i $|BZ| = s - b$. Na donjoj su slici označene sve te dužine.



Sad je

$$\frac{|CX|}{|XA|} \cdot \frac{|AY|}{|YB|} \cdot \frac{|BZ|}{|ZC|} = \frac{s-c}{s-a} \cdot \frac{s-a}{s-b} \cdot \frac{s-b}{s-c} = 1$$

pa se prema Cevinu teoremu, pravci AZ , BX i CY sijeku u jednoj točki koja se naziva Gergonneova točka.

LITERATURA

- 1/ D. Pritikin, G. Yane (2009.): Tricky Factoring, Pythagorean Triples, and Heron's Formula, *Math Horizons*, 17(2)

¹ Cevin teorem. Neka su u trokutu ABC točke X , Y , Z na stranicama $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ redom. Pravci AZ , BX i CY prolaze jednom točkom ako i samo ako je $\frac{|CX|}{|XA|} \cdot \frac{|AY|}{|YB|} \cdot \frac{|BZ|}{|ZC|} = 1$.