

Pitanja budućih učitelja o didaktičkim materijalima

Ana Katalenić, Đakovo

Ne postoji jedinstveni i najbolji odabir između mnogih dostupnih didaktičkih materijala. Odluka ovisi o različitim institucionalnim ili individualnim faktorima te najviše od svega stavovima i kompetencijama učitelja (Bartolini i Martignone, 2014.).

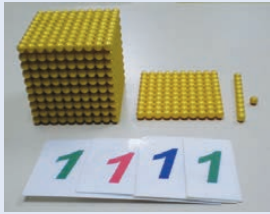


Poznati didaktički materijali

Didaktički materijali (manipulativi, učila) su artefakti koji pomažu učenicima pojmiti apstraktne ideje i postupke temeljem konkretnog iskustva (Bartolini i Martignone, 2014.). Zbog apstraktne prirode matematike kao znanosti mogu imati značajnu ulogu u nastavi istoimenog predmeta, posebice u nižim razredima osnovne škole. Didaktički materijal nije zamjena za matematički sadržaj (koncept ili proceduru) nego ima ulogu reprezentacije – upotrebljava se za prikazivanje određenog obilježja tog sadržaja. Kroz povijest su se različiti artefakti, poput abakusa, upotrebljavali za rješavanje matematičkih problema no edukatori su tek od 19. stoljeća predlagali manipulative za učenje i poučavanje matematike. Prvi među njima je pedagog Friedrich Froebel koji je kreirao Froebelove darove, drvene oblike namijenjene slobodnoj igri djece vrtičke i predškolske dobi. Na tržištu postoje brojni didaktički materijali, a neki od poznatih su dani u tablici 1.

Pitanja budućih učitelja/učiteljica

U sklopu kolegija Metodika matematike I na trećoj godini učiteljskog studija pri Fakultetu za odgojne i obrazovne znanosti u Osijeku studenti se upoznaju s matematičkim sadržajima u razrednoj nastavi. U pripremi diskusije studenti/studentice upućeni/upućene su napisati svoja pitanja o upotrebi didaktičkih materijala (DM) u nastavi matematike. Ukupno je 30 studenata/studentica postavilo jedno ili više pitanja. Priroda njihovih pitanja pokrivala je različite aspekte rada s didaktičkim materijalima – prednosti i nedostaci, načini i učestalost upotrebe DM-a, reprezentacija matematičkih sadržaja, vrste i dostupnost DM-a. Učestalost postavljenih pitanja s obzirom na prirodu problema upotrebe didaktičkih materijala je dana u tablici 2. U daljnjem tekstu su odgovori na postavljena pitanja organizirani po temama.

kreators	didaktički materijal	matematički sadržaj
Friedrich Froebel bio je njemački edukator za rani odgoj i obrazovanje u prvoj polovici 19. stoljeća. Usmjeravao je obrazovanje podjednako prema djevojčicama i dječacima, bogatima i siromašnima. Uključivao je žene profesionalno u obrazovni rad i poticao očev angažman u odgoju djeteta.	Froebelovi darovi 	Djeca uspoređuju, razvrstavaju, grupiraju, sastavljaju, preslaguju, istražuju obrasce – razvijaju svoje predmatematičke vještine (Glasnović Gracin, 2010.). Edukator vrednuje dječje ideje o kvalitativnim i kvantitativnim obilježjima materijala nastale za vrijeme slobodne igre.
Maria Montessori bila je prva žena doktorica medicine u Italiji. Svoje didaktičke materijale i škole namijenila je djeci s teškoćama i siromašnim obiteljima početkom 20. stoljeća. Poticala je aktivno i samostalno učenje u pripremljenoj okolini pod krlaticom "Pomozi mi da učinim sam".	materijal M. Montessori 	Materijal M. Montessori pokriva sadržaje iz matematike i drugih predmeta po cijeloj vertikalnoj obrazovanju. Na slici su dva materijala, zlatne perle i brojevnice, koji se u kombinaciji upotrebljavaju za učenje mjesnih vrijednosti i višeznamenastih brojeva počevši od 3. godine života (Perić, 2009.).
Georges Cuisenaire bio je belgijski učitelj. U drugoj polovici 20. stoljeća kreirao je i primijenio drvene prutove u boji za poučavanje učenika s teškoćama. Njegovi su prutovi danas jedan od najpopularnijih materijala u nastavi matematike u svijetu.	Cuisenaireovi prutovi 	Prutovi su kvadratne prizme brida osnovke duljine 1 cm i različite visine te odgovaraju brojevima od 1 do 10. Upotrebljavaju se za nizanje, uspoređivanje, rastavljanje i računanje u skupu brojeva do 20 i druge sadržaje poput množenja, brojeva do 100, razlomaka, statistike (Corn, 2016.).
Zoltan Dienes bio je dugoživući mađarski matematičar. Svoje je znanstvene interese iz fundamentalne matematike realizirao u nastavi matematike. Poticao je poučavanje usmjereno na djecu i učenje kroz igru već 60-ih godina prošlog stoljeća.	Dienesovi blokovi 	Drveni blokovi su kocke i kvadri koji predstavljaju dekadске jedinice: jedinice su kocke brida duljine 1 cm, desetice kvadri dimenzija 1 cm × 1 cm × 1 dm, stotine 1 dm × 1 dm × 1 dm, tisućice kocke brida duljine 1 dm. Upotrebljavaju se za modeliranje vrijednosti, odnosa i računanja s višeznamenastim brojevima.
Rudolf Steiner je početkom 20. stoljeća utemeljio filozofiju koja integrira kognitivni, umjetnički, fizički i društveni razvoj pojedinca. Prvu školu osnovao je za djecu radničke klase. Njegova Waldorfska pedagogija nije temeljena na upotrebi didaktičkih materijala, nego holističkom konkretnom iskustvu.	matematički kotač 	Na kotaču su uz svaki od 10 klinova redom napisane znamenke u smjeru kazaljke na satu. Prateći ritam brojenja u koracima, uže se mota oko klina koji odgovara zadnjoj znamenki odbrojenog broja. Za svaki broj uže će formirati različite uzorke. Peterokut na slici je uzorak koji se veže za niz parnih brojeva.

Tablica 1. Poznati didaktički materijali, njihovi kreatori i povezani matematički sadržaj

tema postavljenog pitanja	učestalost
prednosti i nedostaci	11
reprezentacija sadržaja	9
načini korištenja	9
učestalost korištenja	7
vrste i dostupnost	5

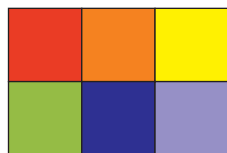
Tablica 2. Učestalost postavljenih pitanja po temama

Prednosti i nedostaci upotrebe didaktičkih materijala

Provedena su brojna istraživanja o doprinosu upotrebe didaktičkog materijala u nastavi matematike. Carbonneau i sur. (2013.) su provedli meta-analizu 55 takvih istraživanja koja je pokazala kako upotreba didaktičkih materijala ima pozitivan učinak na učenje matematike. Veličina učinka ovisi o načinu poučavanja, dobi učenika,

matematičkom sadržaju i obilježjima didaktičkog materijala. Najbolje rezultate daje vođeno učenje uz potporu dobro dizajniranih didaktičkih materijala kod djece u dobi od 7 do 11 godina. Upotreba didaktičkih materijala omogućava uočavanje bitnih obilježja, razumijevanje apstraktnih sadržaja, povezivanje različitih reprezentacija, dulje zadržavanje stečenih kompetencija i drugo. Nedostaci upotrebe didaktičkih materijala su uglavnom vezani za organizaciju nastave; zahtijevaju dodatnu pripremu, oduzimaju mnogo vremena, aktivnosti su dugotrajne (Kišosondi i sur., 2022.).

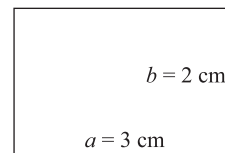
Pitanje koje je postavilo najviše studenata/studentica je: *Hoće li učenici koji upotrebljavaju DM imati poteškoća pri rješavanju problema u situacijama kada im DM nije dostupan?* Najvažniji aspekt upotrebe didaktičkog materijala je olakšavanje i omogućavanje postupnog prijelaza s konkretne na apstraktnu razinu (više o *concreteness fading* u Kišosondi i sur. (2022.)). Prijelaz se može ostvariti kombinacijom didaktičkih materijala kao u primjeru materijala M. Montessori u tablici 1. Primjerice, učenici preuzmu hrpu blokova različitih dekadskih vrijednosti, razvrstavaju ih na tisućice, stotice, desetice, jedinice, prebrojavaju i zamjenjuju (10 desetica za 1 stoticu ili drugo), čitaju dobiveni broj (1 tisućica, 3 stotice, 5 jedinica) biraju odgovarajuće brojevne kartice (3 stotice odgovara kartici 300 i drugo), slažu brojevne kartice jednu na drugu počevši od najveće, dobivaju zapis broja (1305). Prijelaz može biti dugotrajan, u smislu da se apstraktni matematički sadržaji mogu s pomoću konkretnog materijala (po)učiti u ranijoj dobi nego su predviđeni kurikulumom. Primjerice, koncept površine pravokutnika na konkretnoj razini učenici 2. razreda razvijaju sastavljanjem pravokutnika od opipljivih kvadratnih pločica te povezuju ukupan broj pločica s umnoškom broja pločica po duljini i širini. Na prijelaznoj razini određuju broj jediničnih kvadrata u kvadratnoj mreži (koristeći se mrežom na prozirnici kao mjernim instrumentom) te na apstraktnoj razini računaju površinu koristeći se apstrahiranom i generaliziranom formulom za površinu pravokutnika (slika 1).



Pravokutnik se sastoji od 6 kvadratnih pločica.



Površina pravokutnika je 6 jediničnih kvadrata (u kvadratnoj mreži).

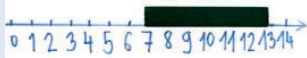
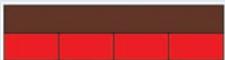


Površina pravokutnika je 6 kvadratnih centimetara.

Slika 1. Prijelaz s konkretnog na apstraktno u slučaju površine pravokutnika

Načini i učestalost upotrebe didaktičkih materijala

Različiti didaktički materijali ili različite aktivnosti s istim materijalom reprezentiraju različite sadržaje ili različita obilježja istog sadržaja. Primjerice, geometrijske pločice upotrebljavaju se za aktivnosti u domenama *Brojevi*, *Oblik i prostor* i *Mjerenje* (Čizmešija, Stilinović, 2021.). Ranija i dugotrajnija upotreba istog didaktičkog materijala olakšava funkcionalnu upotrebu materijala pri rješavanju problema i poboljšava konceptualno razumijevanje povezanog matematičkog sadržaja. No pojedini didaktički materijal ne objašnjava sva obilježja jednog matematičkog sadržaja, pogotovo ne sve sadržaje nastave matematike. Zato ne postoji jednostavan odgovor na pitanje *je li bolje upotrijebiti jedan ili različite DM-ove na jednom satu i u radu kroz više razreda* koje su postavile studentice. Kombiniranje odgovarajućih DM-ova doprinosi prijelazu s konkretne na apstraktnu razinu i povezivanju različitih obilježja istog sadržaja. Učitelj treba odabrati didaktički materijal i osmisliti odgovarajuću aktivnost ovisno o postavljenom cilju. U prvom razredu može simultano upotrijebiti brojače (gumbi, kamenčići, štapići, unifix kocke), Cuisenaireove prutove, brojevnju crtu, računsku gusjenicu (i/ili drugo), dopustiti učeniku izbor materijala koji najbolje odgovara njegovom pristupu učenju matematike ili na svakom satu izmjenjivati učenike u upotrebi dostupnih didaktičkih materijala. Važno je birati didaktičke materijale koji se mogu upotrijebiti dugotrajnije te transparentno i funkcionalno povezati s apstraktnim sadržajem i drugim materijalima (tablica 3).

dob	povezivanje s apstraktnim sadržajem	povezivanje s drugim materijalom																																										
predškola – 1. razred	Nizanjem se apstraktni pojam broja veže s bojom prutova. 	Zbrajanje i oduzimanje provodi se na brojnoj crti s pomoću prutova.  $7 + 6 = 13$																																										
1. – 2. razred	Rastavljanje prutova potiče strategiju rastavljanja u zbrajanju i oduzimanju s prijelazom desetice.  $7 + 6 = 7 + 3 + 3 = 10 + 3$	Dienesovi blokovi i Cuisenaireovi prutovi modeliraju odnose desetice i jedinica. 																																										
2. – 4. razred	Tablica množenja popunjava se s pomoću prutova. <table border="1" data-bbox="566 766 829 1007"><tr><th>x</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr><tr><th>1</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>2</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>3</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>4</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>5</th><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x	1	2	3	4	5	6	1							2							3							4							5							Prutovi i Dienesovi blokovi modeliraju pravokutni pristup množenju. (Glasnović Gracin, 2014.) 
x	1	2	3	4	5	6																																						
1																																												
2																																												
3																																												
4																																												
5																																												
2. – 5. razred	Prutovi modeliraju mjerno dijeljenje i razlomke. 																																											

Tablica 3. Dugotrajna i različita upotreba istog didaktičkog materijala na primjeru Cuisenaireovih prutova

Sljedeća pitanja postavila je tek po jedna studentica, ali njihova je priroda istaknuta u istraživanjima: *Trebamo li dopustiti da djeca sama shvate i istraže didaktički materijal ili im kažemo kako se njime koristimo?* i *Što ako djeca didaktički materijal počnu upotrebljavati u svrhu zabave?* Svrha didaktičkih materijala višestruko se transponira; kreator izrađuje didaktički materijal s određenom namjenom → učitelj interpretira namjenu didaktičkog materijala i osmišljava aktivnosti sukladno planiranom cilju → učenik provodi aktivnosti i tako razvija vlastito tumačenje materijala. Izvorna namjena materijala i reprezentacija sadržaja učeniku ne mora biti očita, stoga je poučavanje i učenje s pomoću didaktičkih materijala najbolje ostvariti vođenim otkrivanjem (Pavleković, 2009.). Učenika treba potak-

nuti na samostalni rad i istraživanje te intervenirati tako da ga se fokusira na obilježja didaktičkog materijala koja su relevantna i značajna za ostvarivanje cilja, razumijevanje sadržaja i stjecanje kompetencija. Intenzitet intervencije učitelja ovisit će o prethodnom iskustvu učenika s odabranim materijalom, postavljenom cilju i reprezentaciji apstraktnog sadržaja.

Nastavno na izazove upotrebe didaktičkih materijala u nastavi, istraživanja su pokazala kako učitelji aktivnosti s didaktičkim materijalima ne doživljavaju kao pravo učenje i poučavanje nego odabiru i uključuju didaktičke materijale u kognitivno manje zahtjevnim aktivnostima (Kišosondi i sur., 2022.). Primjerice, učenici ih upotrebljavaju

za uvježbavanje ili za nagradu nakon uspješno dovršenih formalnih aktivnosti. Najbolje razumijevanje postiže se upotrebom didaktičkih materijala pri rješavanju problema. Preporuča se birati materijal koji nije perceptivno bogat kako bi se učenici fokusirali na matematički reprezentativna obilježja.

Više studenata/studentica postavilo je pitanje o učestalosti i ograničavanju upotrebe didaktičkih materijala. Uzimajući u obzir prednosti i nedostatke te načine korištenja, slijedi da se didaktički materijali trebaju

- upotrebljavati kad je konkretizacija neophodna s obzirom na dob i kompetencije učenika
- češće upotrebljavati dok je učenik na konkretnoj razini u radu s matematičkim sadržajem
- postupno isključivati ili zamjenjivati materijalima s prijelaznom ulogom.

Nagli prelazak s konkretne na apstraktnu razinu u učenju i poučavanju ili inzistiranje na konkretizaciji kad drugi oblici matematičkog mišljenja polučuju isti rezultat (zbrajanje i oduzimanje brojeva do 1 000 po analogiji sa zbrajanjem i oduzimanjem brojeva do 100) može loše utjecati na interes i uspješnost učenika.

Reprezentacija matematičkih sadržaja

Didaktički materijali poznati studenticama su tangram, geoploča, Cuisenaireovi prutovi i brojevnice kartice. Učitelji razredne nastave spominju još abakus, ravnotežnu vagu, unifix kocke, Dienesove blokove, računsku gusjenicu, brojevnu crtu i modele tijela s mrežom ili bez mreže (Kišosondi i sur., 2022.). Teško je jednostavno i kratko odgovoriti na pitanja *koji sadržaj treba reprezentirati didaktičkim materijalima i kako se koristiti svakim od pojedinih materijala*. Prvo je potrebno uzeti u obzir da upotreba didaktičkog materijala ovisi o razini na kojoj se poučava (konkretnoj, prijelaznoj ili apstraktnoj) i kompetencijama učenika. Primjerice, učenici 2. razreda na konkretnoj razini uz pomoć Dienesovih blokova učinkovito zbrajaju i oduzimaju višeznamenaste brojeve dok upotreba istog materijala učenicima 3. i 4. razreda koji su na apstraktnoj razini predstavlja dodatni posao i opterećenje (više o *cognitive*

load u Kišosondi i sur. (2022.)). Potom ćemo istaknuti kako se jednim didaktičkim materijalom mogu provesti brojne aktivnosti usmjerene prema jednom ili različitim sadržajima. Primjerice, Dienesovi blokovi pomažu čitanju, pisanju, uspoređivanju i računanju s višeznamenkastim brojevima, ali se mogu učinkovito upotrijebiti za poučavanje obujma kocke i kvadra. Dalje, unifix kocke su raznobojne, jednake kocke koje se sastavljaju na jednoj ili na više strana (slika 2). Mogu se upotrijebiti za razvijanje osnovnog pojma o broju, prostornog zora i prikazivanje podataka. Dodijeli li se pozicijski sustav, primjerice stavljanje spojenih kocaka na svaki prst, mogu se prikazivati i višeznamenasti brojevi.

Vrste i dostupnost didaktičkih materijala

Didaktički materijali mogu biti fizički ili virtualni. Fizički materijali mogu biti brendirani ili samostalno izrađeni. Gotovi materijali su skupi pa samim time manje dostupni, što se u nekim istraživanjima navodi kao nedostatak didaktičkih materijala (Kišosondi i sur., 2022.). Kako je jedna studentica sugerirala, izrada ili osmišljavanje materijala pada na učiteljicu ili učenika. Izrada materijala poput snopova štapića, 5/10 okvira, računske gusjenice, brojevnih prutova, brojevnice crte, metra, kartona za jaja s brojačima, ravnotežne vage, menzure može biti projektna aktivnost koju učenici realiziraju na satu matematike, u integriranoj nastavi ili kod kuće s roditeljima ili skrbnicima. Ovisno o pedagoškoj



Slika 2. Set unifix kocaka

odluci učitelja, svi učenici mogu izraditi isti materijal za individualnu upotrebu ili učenici mogu izrađivati različite materijale kojima će se naizmjenice koristiti u aktivnostima.

Virtualni manipulativi su aplikacije, apleti ili programi koji upotrebljavaju vizualnu, interaktivnu i relacijsku reprezentaciju matematičkog sadržaja. Oni mogu imitirati poznate fizičke materijale ili nuditi inovativna rješenja. Lako se nađu apleti koji podržavaju rad s virtualnim Cuisenaireovim prutovima, Dienesovim blokovima, geopločom, kockama i projekcijama, tangramom. Oni su dostupni, besplatni i pobuđuju interes učenika. Dobro dizajnirani virtualni manipulativi omogućuju simultanu aktivaciju više reprezentacija: vizualne, verbalne, simboličke, dinamičke, gestualne poput besplatne iPad

aplikacije TouchCounts. Važno je istaknuti kako kvizovi izrađeni u digitalnom okruženju nisu virtualni manipulativi jer ne reprezentiraju matematički sadržaj.

Zaključak

Provedena aktivnost sa studentima i istraživanja s učiteljima, posebno u kontekstu razredne nastave u Republici Hrvatskoj (Kišosondi i sur., 2022.) ukazuju na potrebu dodatne edukacije o upotrebi didaktičkih materijala. U ovom tekstu se spominju korisni i dostupni didaktički materijali, a u literaturi navode tekstovi s detaljnijim opisima upotrebe pojedinih didaktičkih materijala.

LITERATURA

- 1/ M. G. Bartolini i F. Martignone (2014.): Manipulatives in mathematics education, u S. Lerman: *Encyclopedia of mathematics education*, str. 365–372, Springer Netherlands.
- 2/ K. J. Carbonneau i S. Marley (2015.): Instructional guidance and realism of manipulatives influence preschool children's mathematics learning, *Journal of Experimental Education* 83(4), str. 495–513.
- 3/ M. Cindrić (2014.): Koraćanje po brojevnom pravcu, *Matematika i škola* 77, str. 55–57.
- 4/ P. Corn (2016.): Cuisenaire rods, *Osječki matematički list* 16(1), str. 67–82.
- 5/ A. Čižmešija i S. Stilić (2021.): Šest veličanstvenih. Geometrijske pločice – jednostavno učilo s bezbroj mogućnosti, *Matematika i škola* 111, str. 4–19.
- 6/ A. Čižmešija, T. Soucie i R. Svedrec (2012.): Primjena geoploče u nastavi matematike, *Poučak* 13(50), str. 25–39.
- 7/ A. Katalenić (10. 4. 2020.): Didaktički materijali – YouTube. Pristupljeno 5. 3. 2023. na <https://youtu.be/gB9Q1AyJn3Q>
- 8/ Froebel Gifts Kindergarten Preschool Curriculum Educational Toys. (n.d.): Pristupljeno 4. 3. 2023. na <https://froebelgifts.com/intro-to-the-gifts/>
- 9/ D. Glasnović Gracin (2010.): Predmatematičke vještine, *Matematika i škola* 55, str. 200–205.
- 10/ D. Glasnović Gracin (2014.): Modeli aritmetike za razrednu nastavu, *Poučak* 15(59), str. 12–21.
- 11/ D. Herjavec i D. Glasnović Gracin (2010.): Računska gusjenica, *Matematika i škola* 57, str. 59–63.
- 12/ A. Katalenić, I. Pavleković i I. Tumić (2019.): The development of the number sense through the comparison of the national, Montessori and Waldorf curriculum for the primary mathematics education in Croatia, u D. Glasnović Gracin i G. Trupčević: *New challenges in mathematics teaching*, str. 35–47, Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet, Zagreb.
- 13/ J. Kišosondi, R. Kolar-Šuper, A. Katalenić i Z. Kolar-Begović (2022.): Didactic manipulatives in primary mathematics education in Croatia, u Z. Kolar-Begović, R. Kolar-Šuper i A. Katalenić: *Advances in research on teaching mathematics*, str. 55–71, Element, Zagreb.
- 14/ J. Nagy, L. Kolak i A. Katalenić (2015.): Slagalice u razrednoj nastavi, *Matematika i škola* 79, str. 158–163.
- 15/ M. Pavleković (2009.): *Matematika i nadareni učenici. Razvoj kurikula na učiteljskim studijima za prepoznavanje, izobrazbu i podršku darovitih učenika*, Element, Zagreb.
- 16/ T. Soucie (2011.): Zbrajanje i oduzimanje prirodnih brojeva u nižim razredima osnovne škole, *Poučak* 12(48), str. 52–63.
- 17/ TouchCounts (n.d.): Pristupljeno 5. 3. 2023. na <http://touchcounts.ca/>
- 18/ Zoltan Dienes' Web Site – Biography, Math Games, Poetry and more... (n.d.): Pristupljeno 4. 3. 2023. na <https://zoltandienes.com/>