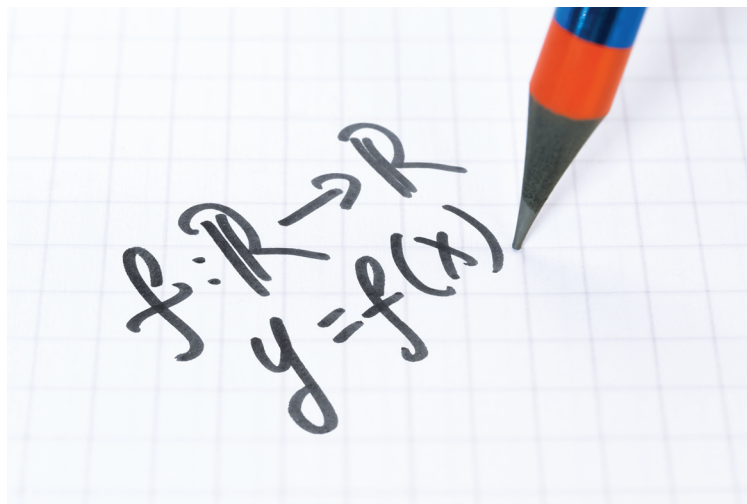


Funkcijske jednadžbe



Ivan Ćorić, Novska i
Tea Kranjec, Varaždin

Uvod

Jednadžbe su osnovni alat matematičara za rješavanje raznovrsnih zadataka te za modeliranje situacija iz svakodnevice. Naravno, postoji više vrsta jednadžbi te je svaka od njih na svoj način zanimljiva. Još u osnovnoj školi upoznali smo se s linearnim jednadžbama s jednom ili dvjema varijablama koje imaju široku primjenu u svakodnevnom životu. Ovaj članak temeljit će se na posve drukčijem tipu jednadžbi – funkcijskim jednadžbama. To su jednadžbe u kojima ulogu nepoznanice, koju je do sada poprimao broj, poprima funkcija čije nas djelovanje sada zanima. Funkcijske jednadžbe na matematičkim se natjecanjima javljaju tek na državnoj razini u 4. razredu srednje škole, no jednostavnije funkcijske jednadžbe učenici mogu rješavati čim dobro razumiju pojam funkcije, a posebno nakon susreta s kvadratnom ili eksponencijalnom funkcijom.

Zadatci s funkcijskim jednadžbama nisu šablonski i potrebno je proučiti mnogo primjera i različitih me-

toda rješavanja kako bismo ih dobro razumjeli te znali i primijeniti u zadacima. U ovom članku iznijet će se neki primjeri i zadatci koji će čitatelju pokušati približiti čar i bit funkcijskih jednadžbi.

Primjeri

Ponekad djelovanje funkcije koju tražimo nije zadano za klasični argument x , nego za neki zbroj, umnožak ili slično. U takvim situacijama, ako je moguće, korisno je zapisati pravilo pridruživanja kao jasnu i preglednu ovisnost o argumentu.

Primjer 1. Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija takva da je

$$f(-3t + 2) = 9t^2 - 15t + 7, \quad \text{za svaki } t \in \mathbb{R}.$$

Odredite $f(x)$.

Rješenje. Primijetimo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji jedinstven broj $t \in \mathbb{R}$ takav da je $-3t + 2 = x$. Zaista, jednadžbu $-3t + 2 = x$ možemo "riješiti

po t :

$$\begin{aligned}-3t + 2 &= x \\ -3t &= x - 2 \\ t &= \frac{2-x}{3}.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $\frac{2-x}{3}$ umjesto t u početnu jednadžbu dobijemo

$$\begin{aligned}f(x) &= 9 \cdot \left(\frac{2-x}{3}\right)^2 - 15 \cdot \frac{2-x}{3} + 7 \\ &= x^2 + x + 1.\end{aligned}$$

Dakle, za svaki $x \in \mathbb{R}$ treba vrijediti

$$f(x) = x^2 + x + 1.$$

Provjerimo dobiveno rješenje uvrštavanjem $x = -3t + 2$ u dobivenu formulu za $f(x)$:

$$\begin{aligned}f(-3t + 2) &= (-3t + 2)^2 + (-3t + 2) + 1 \\ &= 9t^2 - 15t + 7. \blacksquare\end{aligned}$$

Pri rješavanju funkcijskih jednadžbi korisno je **uvrstiti konkretne vrijednosti u jednadžbu**. Dobro je uvrstiti u jednadžbu 0 , 1 ili -1 jer je 0 neutralni element za zbrajanje, 1 neutralni element za množenje, a -1 nam može pomoći pri kraćenju nekih izraza i pojednostavljivanju problema. Naravno, uvrstiti možemo i neki drugi broj koji se čini prikladnim. Primjenu ilustriram sljedećim primjerom.

Primjer 2. Pronađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(xyz) = xf(x) + yf(y) + zf(z),$$

za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Uvrštavanjem $y = 0, z = 0$ u jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned}f(x \cdot 0 \cdot 0) &= x \cdot f(x) + 0 \cdot f(0) + 0 \cdot f(0) \\ f(0) &= xf(x)\end{aligned}$$

za sve $x \in \mathbb{R}$. Posebno, dobiveni izraz vrijedi i za $x = 0$ pa uvrštavanjem dobivamo

$$f(0) = 0 \cdot f(0) = 0.$$

Stoga je $xf(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Sada možemo iskoristiti taj izraz triput da dobijemo

$$f(xyz) = xf(x) + yf(y) + zf(z) = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Dakle, $f(xyz) = 0$ za sve $x, y, z \in \mathbb{R}$. Uvrstimo li u tu jednakost $y = 1, z = 1$, imamo $f(x) = 0$, što vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Preostaje provjeriti da je funkcija $f(x) = 0$ rješenje. Vrijedi

$$\begin{aligned}f(xyz) &= xf(x) + yf(y) + zf(z) \\ &= x \cdot 0 + y \cdot 0 + z \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

pa je dobiveno rješenje, funkcija $f(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, uistinu rješenje jednadžbe. ■

Skeniramo pozornost na naizgled nevažnu sitnicu. Tijekom rješavanja funkcijske jednadžbe više se puta uvrštavaju različite vrijednosti u danu ili neku usput dobivenu funkcijsku jednadžbu. Pritom je potrebno jasno napisati što se gdje uvrštava kako bi rješenje bilo jasno i čitko.

Još jedan koristan koncept pri rješavanju funkcijskih jednadžbi jest **parnost/neparnost funkcije**. Funkcija f je parna ako za svaki $x \in \mathbb{R}$ zadovoljava $f(-x) = f(x)$, a neparna ako zadovoljava $f(-x) = -f(x)$. Uvrštavanjem suprotnog broja ($-x$ umjesto x) u funkcijsku jednadžbu često ćemo dobiti izraz koji nam pomaže da dobijemo bitno jednostavniji uvjet. Ako primijetimo da je tražena funkcija parna (ili neparna), rješavanje će biti lakše.

Primjer 3. Pronađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je

$$f(x)f(y) = f(x - y),$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Zamijenimo li u danoj jednadžbi $(x, y) \rightarrow (x, 0)$, dobivamo

$$f(x)f(0) = f(x - 0) = f(x),$$

a zamjenom $(x, y) \rightarrow (0, x)$

$$f(0)f(x) = f(0 - x) = f(-x).$$

Stoga je $f(x) = f(-x)$, odnosno funkcija f je parna.

Sada uvrstimo $(x, y) \rightarrow (x, -y)$:

$$f(x)f(-y) = f(x - (-y)) = f(x + y),$$

pa zbog prethodnog zaključka o parnosti funkcije f imamo da je

$$f(x - y) = f(x)f(y) = f(x)f(-y) = f(x + y).$$

Da bi vrijedilo

$$f(x - y) = f(x + y), \quad (1)$$

f mora biti konstantna funkcija $f(x) = c$ za neki $c \in \mathbb{R}$. Kako to znamo?

Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Dokazat ćemo da iz (1) slijedi da je $f(a) = f(b)$.

Uočimo da postoje $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b. \end{cases}$$

To su $x = \frac{a+b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$. Vrijedi:

$$f(a) = f(x + y) = f(x - y) = f(b).$$

Time smo dokazali da je funkcija f konstantna.

Pitanje je: može li svaka konstantna funkcija biti rješenje? Neka je $c \in \mathbb{R}$ i $f(x) = c$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tada je:

$$c \cdot c = f(x)f(y) = f(x - y) = c.$$

Zaključujemo da je $c = c^2$, odnosno $c(1 - c) = 0$, iz čega slijedi $c = 0$ ili $c = 1$. Dakle, moguća rješenja su funkcije $f(x) = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ i $f(x) = 1$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Provjerimo dobivene mogućnosti. Uvrštavanjem $f(x) = 0$ u danu funkcijsku jednadžbu dobivamo $0 \cdot 0 = 0$, a uvrštavanjem $f(x) = 1$ imamo $1 \cdot 1 = 1$. Time smo se uvjerali da su dobivene funkcije doista rješenja zadane funkcijske jednadžbe. ■

Funkcija koju dobijemo bilo kojom metodom nije uvijek i rješenje zadane funkcijske jednadžbe. Zato svako dobiveno rješenje treba provjeriti – utvrditi zadovoljava li polaznu funkcijsku jednadžbu.

Princip matematičke indukcije također je koristan alat za rješavanje funkcijskih jednadžbi. Naime, matematička indukcija nam služi za dokazivanje raznih tvrdnji, pa čak i onih koje se čine toliko jednostavnima da ih i ne treba dokazivati. No, uvijek težimo rigoroznosti i potpunosti naših rješenja i dokaza. Kada se u zadatku traži da dokažemo neku tvrdnju za svaki ili barem većinu prirodnih brojeva, valja naslutiti da bi ključ rješenja mogao biti u matematičkoj indukciji. Ovo, dakako, vrijedi općenito, ali sada ćemo vidjeti primjenu na funkcijskim jednadžbama.

Primjer 4. Postoji li funkcija $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takva da vrijedi

$$f(n + 1) - f(n) = f(f(n)),$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$?

Rješenje. Pretpostavimo, za početak, da takva funkcija postoji. Kada bi postojala, bilo bi nam korisno pronaći neka njezina svojstva kako bismo otkrili o kojoj se funkciji radi. Kako su domena i kodomena skup prirodnih brojeva, znamo da mora vrijediti $n \geq 1$ te

$$\begin{aligned} f(n + 1) - f(n) &= f(f(n)) \geq 1 \\ f(n + 1) &\geq 1 + f(n) > f(n). \end{aligned}$$

Zaključujemo da je funkcija strogo rastuća. Dokažimo sada matematičkom indukcijom da je $f(n) \geq n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Baza indukcije. Očito je $f(1) \geq 1$ jer je $f(1) \in \mathbb{N}$.

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(n) \geq n$. Tada je

$$f(n + 1) \geq f(n) + 1 \geq n + 1.$$

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(n) \geq n$.

Međutim, vrijedi i

$$\begin{aligned} f(f(n)) &= f(n+1) - f(n) < f(n+1) \\ f(f(n)) &< f(n+1), \end{aligned}$$

pa budući da je funkcija strogo rastuća, možemo zaključiti

$$f(n) < n+1.$$

U isto vrijeme vrijedi $f(n) < n+1$ i $f(n) \geq n$, pa mora biti $f(n) = n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Preostaje provjeriti dobiveno rješenje $f(n) = n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Lijeva strana dane funkcijske jednadžbe jednaka je $f(f(n)) = f(n) = n$, a desna strana $f(n+1) - f(n) = (n+1) - n = 1$. Jednakost vrijedi samo za $n = 1$, a ne za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, jedino moguće rješenje ne zadovoljava zadanu jednadžbu pa stoga zaključujemo da ne postoji tražena funkcija. ■

Primjer 5. Pronađite sve funkcije $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

za svaki $x, y \in \mathbb{Q}$.

Rješenje. Uvrštavanjem $x = 0, y = 0$, dobivamo

$$\begin{aligned} f(0+0) &= f(0) + f(0) \\ f(0) &= 2f(0) \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Još ne znamo koje je pravilo pridruživanja funkcije f , no znamo da ona poprima vrijednosti u $\mathbb{R}$. Neka je $f(1) = c \in \mathbb{R}$.

Uzmimo proizvoljan $q \in \mathbb{Q}$ i pokažimo indukcijom da vrijedi $f(nq) = nf(q)$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Baza indukcije. Za $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi.

Korak indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(nq) = nf(q)$. Tada

$$\begin{aligned} f((n+1)q) &= f(nq+q) \\ &= f(nq) + f(q) \text{ (zadana jednadžba)} \\ &= nf(q) + f(q) \text{ (pretpostavka indukcije)} \\ &= (n+1)f(q). \end{aligned}$$

Tvrdnja slijedi po principu matematičke indukcije.

Uvrstimo u danu funkcijsku jednadžbu $x = nq$ i $y = -nq$ da dobijemo

$$0 = f(0) = f(nq + (-nq)) = f(nq) + f(-nq).$$

Iz toga odmah vidimo da vrijedi $f(-nq) = -f(nq) = -nf(q)$ za $n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}$. Iz svega do sada možemo zaključiti da $f(nq) = nf(q)$ vrijedi za sve $n \in \mathbb{Z}$ i za sve $q \in \mathbb{Q}$. Posebno, ako odaberemo $q = 1$, vidimo da vrijedi $f(n) = nf(1) = cn$ za sve $n \in \mathbb{Z}$.

Nadalje, zapišimo proizvoljan $q \in \mathbb{Q}$ kao $q = \frac{n}{m}$ za neke $n \in \mathbb{Z}$ i $m \in \mathbb{N}$. Tada imamo $mf(q) = mf\left(\frac{n}{m}\right) = f\left(m \cdot \frac{n}{m}\right) = f(n) = cn$. Dijeljenjem obje strane jednakosti s m dobivamo $f(q) = c \cdot \frac{n}{m} = cq$, što mora vrijediti za svaki $q \in \mathbb{Q}$.

Dakle, jedina moguća rješenja zadane funkcijske jednadžbe su funkcije oblika $f(q) = cq$, gdje je $c \in \mathbb{R}$. Konačno, provjerom vidimo da je za sve $c \in \mathbb{R}$ dobivena funkcija zaista rješenje:

$$f(x+y) = c(x+y) = cx + cy = f(x) + f(y). \quad \blacksquare$$

Napomena. Funkcijska jednadžba iz primjera 5 naziva se **Cauchyjeva funkcijska jednadžba**. Ako je domena funkcije $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ili $\mathbb{Q}$, onda je jedino rješenje $f(x) = cx$, za neku konstantu c .

Zadatci se ponekad mogu svesti na oblik koji nam je od prije poznat pa ćemo ih zbog toga lakše i brže riješiti. Dobro je pokušati zadatak preformulirati ili u dijelu zadatka prepoznati nešto jednostavnije ili već viđeno i to iskoristiti u rješavanju.

Primjer 6. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy,$$

za sve $x, y \in \mathbb{Q}$.

Rješenje. Uvedimo supstituciju $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$.

Uvrštavanjem $f(x) = g(x) + \frac{x^2}{2}$ za sve $x \in \mathbb{R}$ u zadanu jednadžbu dobijemo $g(x+y) - \frac{1}{2}(x+y)^2 = g(x) - \frac{1}{2}x^2 + g(y) - \frac{1}{2}y^2 + xy$, odakle slijedi

$$g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Ovo prepoznamo kao Cauchyjevu funkcijsku jednadžbu čija su jedina rješenja funkcije $g(x) = cx$ za $c \in \mathbb{R}$. Dakle, moguća rješenja za funkciju f su $f(x) = cx + \frac{x^2}{2}$, za neku konstantu $c \in \mathbb{R}$. Na kraju kako bismo provjerili rješenje, uvrstimo dobivenu funkciju u početnu jednadžbu

$$\begin{aligned} f(x+y) &= c(x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} \\ &= cx + cy + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2} \\ f(x) + f(y) + xy &= cx + \frac{x^2}{2} + cy + \frac{y^2}{2} + xy, \end{aligned}$$

iz čega vidimo da je doista

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy. \blacksquare$$

Zadatci za vježbu

1. Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija takva da je

$$f\left(\frac{2t+3}{2}\right) = \frac{e^3}{e^{-2t}}, \quad \text{za svaki } t \in \mathbb{R}.$$

Odredite $f(x)$.

2. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x,$$

za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Odredite sve funkcije $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ takve da vrijedi $f(0) = 0$ i

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|,$$

za sve x, y iz područja definicije.

4. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ takve da je $f(1) = 2$ i

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1,$$

za sve $x, y \in \mathbb{Q}$.

Upute

1. Uvedite supstituciju.
2. Uvrstite $\frac{1}{x}$ umjesto x .
3. Uvrstite $y = 0$ te $y = 1$.
4. Dokažite $f(x+n) = f(x) + n$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$.

Rješenja

1. Uvodimo supstituciju $x = \frac{2t+3}{2}$. Tada je $t = \frac{2x-3}{2}$.

Dakle,

$$f(x) = \frac{e^3}{e^{-2\left(\frac{2x-3}{2}\right)}} = \frac{e^3}{e^{-2x+3}} = e^{2x}.$$

Tražena je funkcija $f(x) = e^{2x}$.

2. Uvrstimo li u danu jednadžbu $\frac{1}{x}$ umjesto x , dobijemo

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x}.$$

Ovime smo dobili sustav jednadžbi s dvjema nepoznicama: $f\left(\frac{1}{x}\right)$ i $f(x)$.

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

$$f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Iz prve jednakosti je

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x - 2f(x).$$

Sada ovo uvrštavamo u drugu jednadžbu te određujemo $f(x)$.

$$f(x) + 2(x - 2f(x)) = \frac{1}{x}$$

$$-3f(x) + 2x = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3x}.$$

Provjerimo rješenje:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{3\frac{1}{x}} = \frac{2}{3x} - \frac{1}{3}x$$

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3x}\right) + \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{3}x\right) = x.$$

3. Uvrstimo li $y = 0$, dobivamo

$$|f(x)| \geq |x|,$$

iz čega dobivamo $f(x) \geq x$. Iz ovoga imamo da je $f(1) \geq 1$, no kako je kodomena ove funkcije interval $[0, 1]$, vrijednost funkcije ne može biti veća od 1, pa je $f(1) = 1$.

Uvrstimo li $y = 1$, dobivamo

$$|f(x) - 1| \geq |x - 1|,$$

iz čega slijedi $1 - f(x) \geq 1 - x$ odnosno $f(x) \leq x$.

Kako smo dobili da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x) \geq x$ i $f(x) \leq x$, jedino moguće rješenje je funkcija $f(x) = x$.

Provjera rješenja:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \geq |x - y|.$$

4. Uvrštavanjem $y = 1$ dobivamo

$$f(x) = f(x)f(1) - f(x+1) + 1$$

te zbog $f(1) = 2$ slijedi

$$f(x) + f(x+1) = 2f(x) + 1$$

$$f(x+1) = f(x) + 1 \text{ za sve } x \in \mathbb{Q}.$$

Matematičkom indukcijom lako je pokazati da za svaki racionalan broj x i za svaki prirodni broj n vrijedi

$$f(x+n) = f(x) + n. \quad (2)$$

Uvrstimo li u jednakost (2) $x - n$ umjesto n , dobivamo

$$f(x) = f(x-n) + n,$$

odnosno

$$f(x-n) = f(x) - n.$$

Ovo znači da jednakost (2) vrijedi za sve $n \in \mathbb{Z}$. Posebno, za $a \in \mathbb{Z}$, uvrštavanjem $x = 1$ i $n = a - 1$ u (2) dobivamo

$$f(1+(a-1)) = f(1)+(a-1) = 2+a-1 = a+1.$$

Dakle,

$$f(a) = a + 1 \text{ za sve } a \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Ako sada uvrstimo u jednadžbu $x = \frac{p}{q}$ i $y = q$, gdje je $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, dobivamo

$$f\left(\frac{p}{q} \cdot q\right) = f\left(\frac{p}{q}\right) \cdot f(q) - f\left(\frac{p}{q} + q\right) + 1$$

primijenimo (2):

$$f(p) = f\left(\frac{p}{q}\right)f(q) - \left(f\left(\frac{p}{q}\right) + q\right) + 1$$

primijenimo (3):

$$p + 1 = f\left(\frac{p}{q}\right) \cdot (q+1) - f\left(\frac{p}{q}\right) - q + 1$$

$$p = f\left(\frac{p}{q}\right) \cdot q - q$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{q} = \frac{p}{q} + 1,$$

što nas dovodi do zaključka da je $f(x) = x + 1$, za sve racionalne x .

Provjera rješenja:

$$\begin{aligned} f(x)f(y) - f(x+y) + 1 &= \\ &= (x+1)(y+1) - (x+y+1) + 1 \\ &= xy + x + y + 1 - x - y - 1 + 1 \\ &= xy + 1 \\ &= f(xy). \end{aligned}$$

LITERATURA

1/ Uvod u funkcijske jednadžbe, MNM online predavanje, <https://mnm.hr/online-predavanja> (32. predavanje).